Investigación Operativa
– Entrega de problemas 1 –

Sergio García Mondaray
04621336-S

Escuela Superior de Informática de Ciudad Real
Universidad de Castilla-La Mancha

Índice general

Capítulo 1

Programación lineal

1.1. Clase 1. Introducción a la programación lineal

En infinidad de aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc. se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar alguna función que se encuentra sujeta a determinadas limitaciones (las restricciones).

La programación lineal es el conjunto de técnicas matemáticas que pretenden resolver el problema de maximizar, o minimizar, una función objetivo lineal, de varias variables, y sujeta a una serie de restricciones. Para ello, emplea un modelo matemático[1] del problema. Cualquier problema que se pueda modelizar mediante funciones lineales puede ser solucionado mediante las herramientas de la programación lineal.

1.1.1. Elementos básicos de un problema

Todo problema de programación lineal tiene cuatro elementos básicos:

1. El conjunto de datos.
2. El conjunto de variables que intervienen, con sus respectivos dominios de definición.
3. El conjunto de restricciones del problema, que definen el conjunto de soluciones factibles.
4. La función lineal a optimizar.

1.1.2. Conceptos básicos

- Problema de programación lineal: optimización de una función $Z = f(x)$, sujeta a una serie de restricciones.
- Región factible: conjunto de puntos acotado por las restricciones.
- Solución factible: cualquier punto que satisface las restricciones.
- Solución óptima: punto que hace que $f(x)$ máxima, o mínima.

[1] Representación abstracta de un problema mediante fórmulas e instrumentos matemáticos.

1.1.3. Convención de símbolos

Un problema de programación lineal tiene el siguiente aspecto:

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, 2, ..., p - 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \; i = 1, 2, ..., q - 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = q, q + 1, ..., m$$

$$1 \leq p \leq q \leq m$$

Donde los símpolos tienen el siguiente significado:

- $\mathbf{Z}$: Representa la función a optimizar.
- $\mathbf{x}_j$: Variable de decisión, con $j = 1...n$.
- $\mathbf{c}_j$: Incremento en Z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de actividad j.
- $\mathbf{b}_i$: Valor que representa la disponibilidad de un recurso para asignar actividades o requerimientos.
- $\mathbf{a}_{ij}$: Cantidad del recurso i consumido por cada unidad j.
- $\mathbf{n}$: Cantidad de variables de decisión. nº de actividades.
- $\mathbf{m}$: Cantidad de restricciones.

1.1.4. Forma estándar del modelo

Con todo lo visto hasta ahora, podemos resumir en que la forma del modelo matemático empleado tiene el siguiente aspecto:

- Función objetivo:
$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

- Restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

- Soluciones:

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

1.2. Clase 2. Solucionar problemas de programación lineal

1.2.1. El concepto de solución

Una solucion no tiene porqué ser una respuesta final. Una solución es cualquier conjunto de valores de las variables de decisión $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sin importar si es una posibilidad deseable o permitida.

- Solución factible: es una solución que cumple con todas las restricciones funcionales y de signo del problema.

- Solución no factible: es aquella para la que al menos una restricción no es cumplida:

1.2.2. Propiedades del modelo de la programación lineal

Como todo modelo matemático, la programación lineal posee unas propiedades claves para su formulación, e imprescindibles para que un problema sea catalogado de programación lineal:

- Proporcionalidad: la contribución de cada actividad al valor del valor objetivo, y al lado izquierdo de cada restricción, es proporcional al nivel de actividad.

- Actividad: La contribución total de los tipos de recursos es la suma de la contribución de cada recurso individualmente.

- Divisibilidad: Las variables de decisión pueden tomar cualquier valor fraccionario que satisfaga las restricciones funcionales y no sea negativo.

1.2.3. Limitaciones del modelo

Existen una serie de limitaciones, que determinan qué problemas pueden ser resueltos mediante la programación lineal y cuáles no:

- Determinista: Los parámetros del modelo deben ser conocidos y constantes, es decir, no existe incertidumbre. En caso de que exista se hace un análisis de sensibilidad.
- Estático: La variable del tiempo no se involucra formalmente. Los sistemas no evolucionan en el tiempo.
- No suboptimización: La programación lineal busca soluciones óptimas, si no las encuentra no ofrece ninguna solución alternativa.

1.3. Clase 3. El método gráfico

1.3.1. Introducción

Todo problema de programación lineal con dos variables puede ser resuelto mediante un método gráfico, cuyas soluciones serán puntos en un espacio bidemensional.

En la gráfica cada eje representará a cada una de las variables, y de lo que se trata es de dibujar las restricciones en la gráfica. Realizando ésto obtendremos lo que se llama “Región factible”.

La región factible es: El conjunto de puntos, en los cuales todas las restricciones se cumplen. Normalmente las soluciones se encuentran en los extremos de la región factible, para obtener éstos puntos lo único que se hará será calcular el punto de intersección de la rectas que lo componen. Una vez obtenidos estos puntos se sustituyen en la función objetivo, eligiendo como solución aquel que sea óptimo para nuestro problema.

Existen problemas con múltiples soluciones, esto ocurre cuando la recta de la función objetivo es paralela a alguna de las restricciones.

1.3.2. Método de la rectas de nivel

Pasos

- Representamos la Región Factible.
- Representamos las Rectas de Nivel.
- Obtenemos la Solución Óptima.
- Comprobamos el Valor de la recta Z.

Las rectas de nivel dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Siendo la función objetivo $Z = ax + by$ las rectas de nivel se obtienen despejando y, por tanto la forma de las rectas de nivel será

$$y = \frac{Z - ax}{by}$$

Variando el valor de Z se obtienen distintos niveles para esas rectas y por lo tanto distintos valores para f(x,y).

Lo que se tendrá que hacer es ir moviendo esa recta, variando el valor de Z dentro de la región factible, he ir comprobando los puntos por los que pasa, normalmente las soluciones optimas están en los extremos de la región factible. Entonces lo que tendremos que hacer será resolver el par de ecuaciones que intersectan en ese punto y de esta forma obtener el punto que supone la solución óptima.

Notas

- En un problema de programación lineal todas las rectas de nivel son paralelas.
- En un problema de programación lineas los únicos puntos que nos importarán será los que estén dentro de la región factible.
- El máximo o el mínimo se obtendrá en el primer o último punto de contacto de las rectas con la región factible.

1.3.3. Método de los vértices

Conceptos

- Restricción Frontera: Es una recta que marca el limite de lo que permite la restricción correspondiente.
- Soluciones en el vértice: Todos los puntos donde se interceptan las restricciones frontera. Son calculables resolviendo cada par de ecuaciones y los cruces con los ejes. Pueden ser:

  Soluciones factibles en el vértice (FEV): Puntos que se encuentran en los vértices de la región factible.

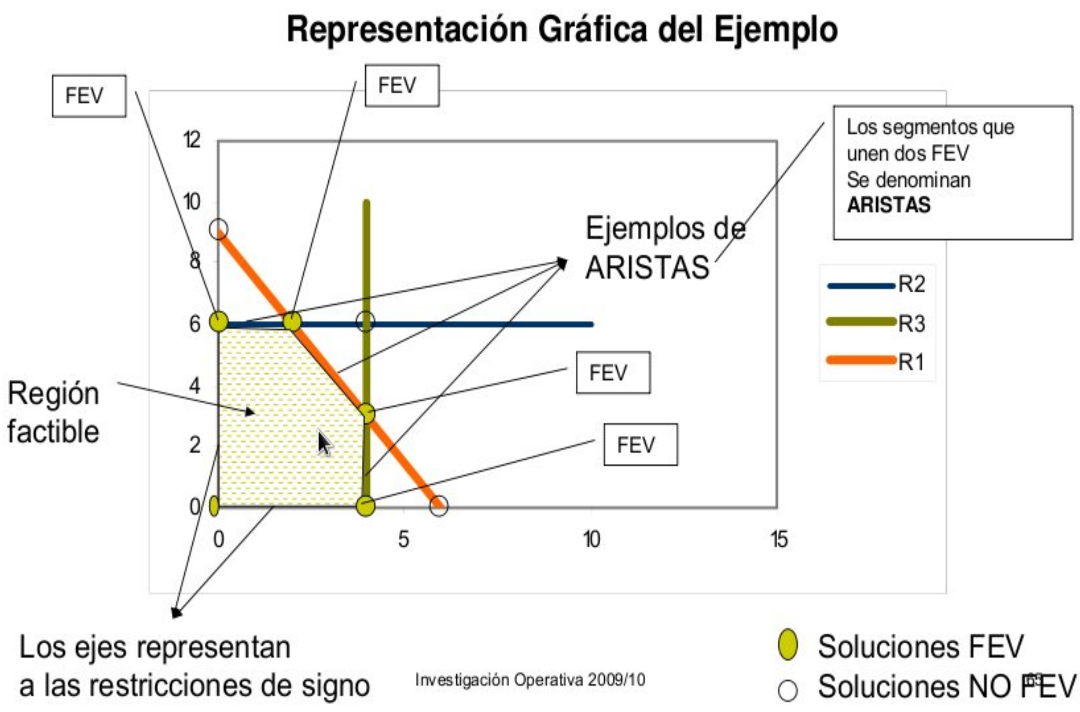
  Soluciones no factibles en el vértice. Los otros puntos que se encuentran en los vértices que no corresponden a la región factible.

- Concepto de Solución Adyacente:En un problema con n variables de decisión, se puede decir que:

  Dos soluciones factibles (FEV) son adyacentes entre sí SI COMPARTEN N-1 RESTRICCIONES.

  Los soluciones adyacentes estarán unidos por un ARISTA.

- Para identificar la organización en aristas de las FEV se realiza una tabla de Soluciones Adyacentes que servirá para facilitar el proceso de iteración.
- Se obtendrán mediante la resolución de pares de ecuaciones y los cortes de las restricciones con los ejes.



Para utilizar el método de los vértices se puede aplicar un método iterativo:

Método iterativo

1. Selecciónese un punto de las soluciones Factibles En el Vértice (FEV).

   Generalmente se empieza si es posible por el punto origen, es decir, el no hacer nada con los recursos.

2. Obténgase el valor en ese punto de Z

3. Obténganse el valor de Z en las soluciones adyacentes.

4. Si hay algún valor adyacente con mayor Z:

   Continuar con ese punto por el paso 1.

   Si no lo hay el punto es considerado como la solución Optima.

Éste método se puede aplicar cuando la región factible no es vacía y cuando la región factible está acotada.

Notas importantes

- Cuando hay solución óptima, siempre existe una en un vértice.
- Si una solución es un vértice no tiene soluciones adyacentes mejores, esa es la solución óptima (óptimo global es local)
- Solución básica (en un vértice) es equivalente a hacer (n-m)

- variables iguales a 0 y resolver para las restantes.
- Soluciones adyacentes tienen iguales todas las variables básicas menos una (y por su supuesto la no básicas)

Capítulo 2

Ejercicios

2.1. Problemas planteados

P.1 Una fábrica de neumáticos fabrica neumáticos de dos tipos: deportivos y normales. Cada neumático pasa por dos fases: calor y frío. Los neumáticos deportivos pasan 2 horas en calor y 1 en frío; mientras que los neumáticos normales pasan 1 hora en calor y 1 hora en frío. La fase de calor dispone de 100 horas de trabajo y la de frío de 75. Los costes de fabricación, y la ganancia de cada tipo de neumático son los siguientes:

	Normales	Deportivos
Coste	16	30
Beneficio	10	21

La fábrica desea conocer el número de neumáticos que debe producir de cada tipo para maximizar el beneficio.

P.2 Un cerrajero fabrica dos tipos de tornillos, T1 y T2, y para ello utiliza una aleación de tres metales: A, B y C. Dispone de 1000g de A, 90g de B y 150g de C. Para fabricar tornillos T1 necesita 50g de A, 2g de B y 10g de C; mientras que para fabricar un tornillo T2 necesita 100g de A, 5g de B y 1g de C.

Los tornillos T1 son mucho más vendidos, porque son más baratos –aunque menos resistentes a la humedad–. Mientras que vende los primeros por 0.05$ la unidad, por los segundos cobra 0.20$. ¿Qué cantidad deberá fabricar de T1 y T2, respectivamente, para obtener el mayor beneficio?

Solución:

Los gastos de fabricación de los tornillos son los siguientes:

	A	B	C
T1	50	2	10
T2	100	5	1

Consideramos las siguientes variables:

$$x_1 = \text{número de tornillos del tipo T1}$$
$$x_2 = \text{número de tornillos del tipo T2}$$

La función objetivo es la siguiente:

$$Z = 0{,}05x_1 + 0{,}2x_2$$

Las restricciones de nuestro modelo serán:

$$\begin{aligned}
&R1 : x_1,\ x_2 > 0\\
&R2 : 50x_1 + 100x_2 \leq 1000\\
&R3 : 2x_1 + 5x_2 \leq 90\\
&R4 : 10x_1 + x_2 \leq 150
\end{aligned}$$

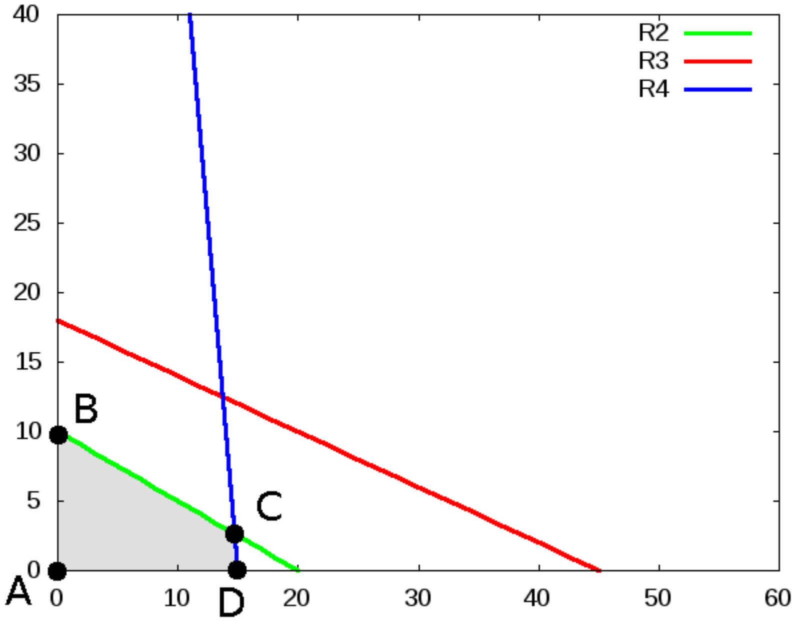


Figura 2.1: Representación gráfica de las restricciones

Calculemos los vértices límite de la región factible:

- $A = (0, 0)$
- $B = (0, 10)$
- $C = \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 + x_2 = 150 \\ 50x_1 + 100x_2 = 1000 \end{array} \right\} = (\frac{280}{19}, \frac{50}{19}) = (14{,}73, 2{,}63)$
- $D = (\frac{150}{10}, 0) = (15, 0)$

Ahora evaluemos la función obtetivo $Z = f(x_1, x_2) = 0{,}05x_1 + 0{,}2x_2$ en cada uno de los vértices de la región factible:

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 10) = 0{,}2 \cdot 10 = 2$$

$$f(15, 0) = 0{,}05 \cdot 15 = 0{,}75$$

$$f(14{,}73, 2{,}63) = 0{,}05 \cdot 14{,}73 + 0{,}2 \cdot 2{,}63 = 1{,}2625$$

Podemos apreciar que, para maximizar el beneficio, la opción óptima es elegir: $x_1 = 0$ y $x_2 = 10$, es decir: la mejor opción es fabricar 10 tornillos del tipo T2 y ninguno de T1.

2.2. Ejercicio 3

Enunciado

En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (1 unidad monetaria). ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo?

Solución

	Girasol	Oliva
Gasto	1	1

Para empezar distingamos las variables del sistema:

$$x_1 = \text{Número de bidones de aceite de girasol}$$
$$x_2 = \text{Número de bidones de aceite de oliva}$$

Planteemos la función a optimizar, en este caso a maximizar:

$$Max(Z) = x_1 + x_2$$

A continuación, estudiemos las restricciones:

$$\begin{aligned} R0 &: \ x_1,\, x_2 \geq 0 \\ R1 &: \ x_1 \geq 20 \\ R2 &: \ x_2 \geq 40 \\ R3 &: \ x_2 \geq \frac{x_1}{2} \\ R4 &: \ x_1 + x_2 \leq 150 \end{aligned}$$

Representemos gráficamente la región de aceptación:

Ahora calculemos los vértices de la región factible:

- $A = (20, 150 - 20) = (20, 130)$
- $B = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1/2 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{array} \right\} = (100, 50)$
- $C = (2 \cdot 40, 40) = (80, 40)$
- $D = (20, 40)$

Ahora evaluamos la función a optimizar, $Z = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, en cada vértice de la región factible:

$$f(20, 130) = 150$$

$$f(100, 50) = 150$$

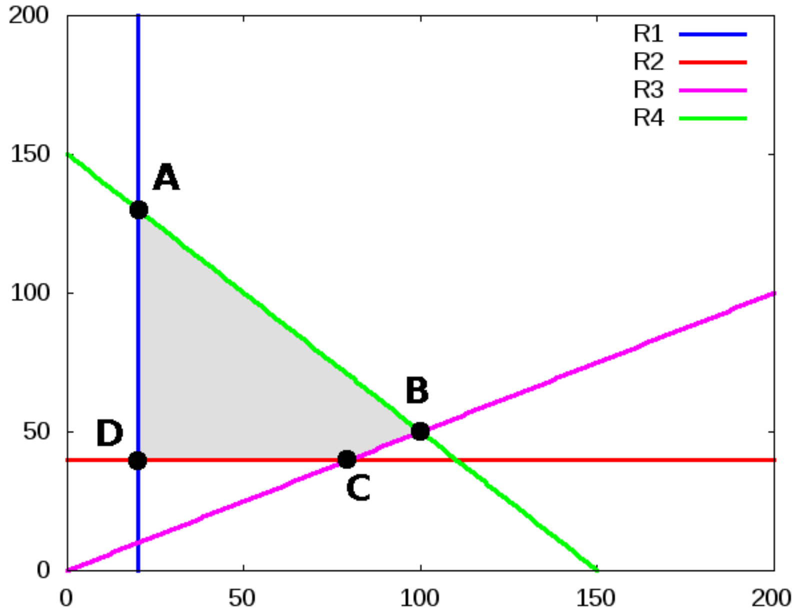


Figura 2.2: Representación gráfica de las restricciones

Al haber dos puntos en los que la función objetivo toma el mismo valor, podemos concluir que existen infinitas soluciones, pues Z es una recta, y coincidirá con el segmento AB de $R4$.

Por el método de las rectas de nivel podemos llegar a la misma conclusión. El vector director de la función objetivo es $(-1, 1)$. Si dibujamos rectas paralelas con este mismo vector director, pasando cada una por uno de los vértices de la región factible, tendremos:

En teoría, nos deberíamos quedar con aquella que pasase por el vértice más lejano, es decir, aquella con más ordenada en el origen. Como podemos observar en la figura, la función objetivo coincide con uno de los lados de nuestra región. Esto implica que el problema tiene infinitas soluciones.

Una de ellas podría ser la que pasa por el punto B, y consistiría en almacenar 100 bidones de aceite de girasol y 50 de aceite de oliva.

2.3. Ejercicio 4

Enunciado

Resolver gráficamente el siguiente problema:

Función objetivo:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
R0 &: \; x_1, \, x_2 \geq 0 \\
R1 &: \; 25x_1 + 50x_2 \leq 800 \\
R2 &: \; 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \leq 7 \\
R3 &: \; x_1 \leq 10
\end{aligned}$$

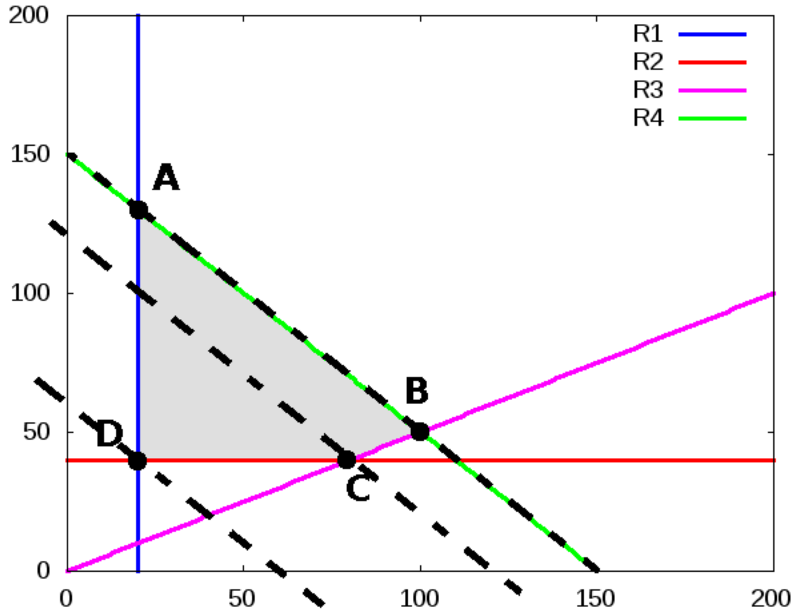


Figura 2.3: Rectas de nivel del ejercicio 3

Solución

A continuación, representamos la región factible, definida en base a las restricciones:

Calculamos los vértices de la región:

- $A = \left\{ \begin{array}{l} 25x_1 + 50x_2 = 800 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 = 7 \end{array} \right\} = (8, 12)$
- $B = \left(10, \dfrac{7 - 0{,}5 \cdot 10}{0{,}25}\right) = (10, 8)$
- $C = (10, 0)$
- $D = (0, 0)$
- $E = \left(0, \dfrac{800 - 0}{50}\right) = (0, 16)$

Y ahora evaluamos la función objetivo, $Z = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$, en cada uno de los vértices:

$$f(8, 12) = 84$$
$$f(10, 8) = 70$$
$$f(10, 0) = 30$$
$$f(0, 0) = 0$$
$$f(0, 16) = 80$$

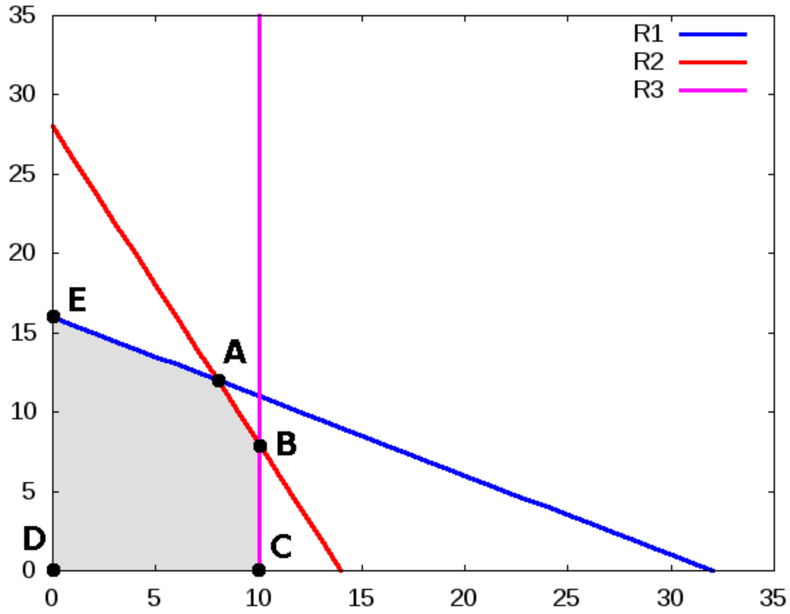


Figura 2.4: Representación gráfica de las restricciones

Los valores de x_1 y x_2 que maximizan la función Z son:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 12$$

2.4. Ejercicio 5

Enunciado

Plantee el problema de Programación Lineal siguiente (no lo resuelva).

Banco Gane está desarrollando una política de préstamos por un máximo de doce millones de euros. La tabla siguiente muestra los datos relevantes de cada tipo de préstamo.

Las deudas impagables no se recuperan y no producen ingresos por intereses. Para competir con otras instituciones financieras se necesita que el banco asigne un mínimo de un 40 % de los fondos a préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de su región, los préstamos para vivienda deben ser iguales, cuando menos, al 50 % del conjunto los préstamos personales, para automóvil y vivienda. También el banco tiene una política explícita de que no permite que la relación general de préstamos impagables entre todos los préstamos sea mayor que el 4 %.

Solución

Definimos las variables de decisión:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \text{dinero invertido en préstamos personales}\\
X_2 &= \text{dinero invertido en préstamos para automóviles}\\
X_3 &= \text{dinero invertido en préstamos para vivienda}\\
X_4 &= \text{dinero invertido en préstamos agrícolas}\\
X_5 &= \text{dinero invertido en préstamos comerciales}
\end{aligned}$$

Los coeficientes de coste son los porcentajes de ganancia para cada tipo de préstamo:

$$C_1 = 14\,\%, \quad C_2 = 13\,\%, \quad C_3 = 12\,\%, \quad C_4 = 12{,}5\,\%, \quad C_5 = 10\,\%$$

Ahora definimos la función objetivo:

$$Z = 0{,}9 \cdot 0{,}14 \cdot X_1 + 0{,}93 \cdot 0{,}13 \cdot X_2 + 0{,}97 \cdot 0{,}12 \cdot X_3 + 0{,}95 \cdot 0{,}125 \cdot X_4 + 0{,}98 \cdot 0{,}1 \cdot X_5$$

Las restricciones:

$$\begin{aligned}
R0 &: \; X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0\\
R1 &: \; X_4 + X_5 \geq 0{,}4 * 12\\
R2 &: \; X_3 \geq 0{,}5(X_1 + X_3 + X_2)\\
R3 &: \; 0{,}1X_1 + 0{,}07X_2 + 0{,}03X_3 + 0{,}05X_4 + 0{,}02X_5 \leq 0{,}04 * 12
\end{aligned}$$

La cantidad de dinero disponible del banco son 12 millones.

2.5. Ejercicio 6

Enunciado

Juan debe trabajar cuando menos 20h a la semana para complementar sus ingresos, y al mismo tiempo asistir a la escuela. Tiene oportunidad de trabajar en dos tiendas de dependiente. En la tienda A puede trabajar entre 5 y 12 horas a la semana, y en la tienda B le permiten trabajar entre 6 y 10 horas. Las dos tiendas le pagan el mismo sueldo por hora. Juan utiliza como criterio de decisión minimizar el factor de tensión en el trabajo. Por diversas entrevistas mantenidas con los empleados de las dos tiendas, ha llegado a la conclusión de que los factores de tensión de las tiendas A y B son 8 y 6, respectivamente. Puesto que la tensión total aumenta cada hora, supone que la tensión total al final de la semana es proporcional a la cantidad de horas que trabaja en las tiendas. ¿Cuántas horas debería trabajar Juan en cada tienda?

Solución

Consideramos los datos del problema.

	Tienda A	Tienda B
Horas	5-12	6-10
Factor de tensión	8	6

La variables de nuestro modelo serán:

$$X_a = \text{n}^{\text{o}} \text{ de horas en tienda A}$$
$$X_b = \text{n}^{\text{o}} \text{ de horas en tienda B}$$

Los coeficientes de tensión:

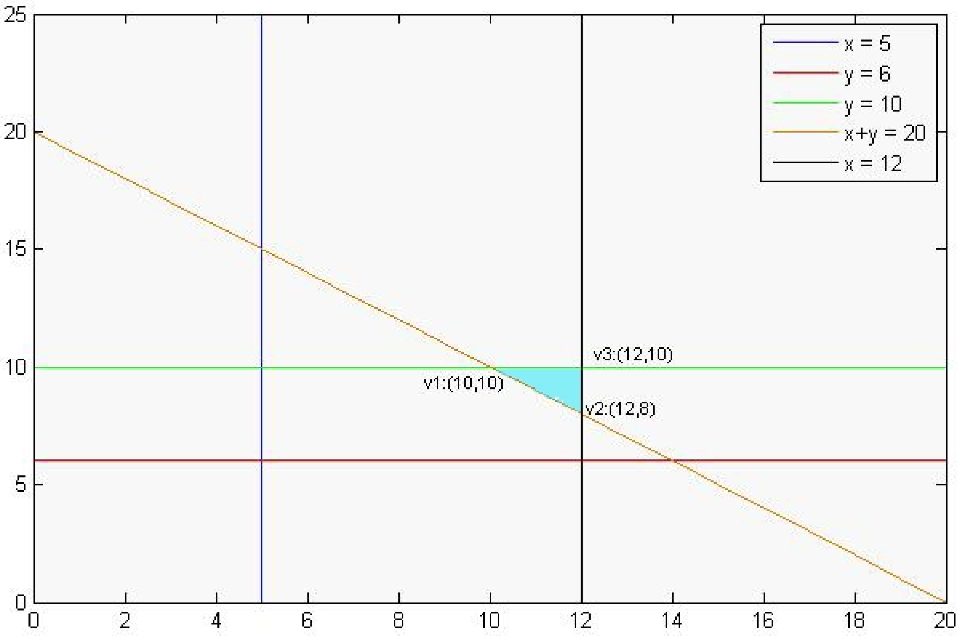
$$C_1 = \text{factor de tensión en tienda A} = 8$$
$$C_2 = \text{factor de tensión en tienda B} = 6$$

La función objetivo, a minimizar, es $Z = 8X_a + 6X_b$.

Las restricciones de nuestro modelo son las siguientes:

$$R_0 : X_a,\ X_b \geq 0$$
$$R_1 : 5 \leq X_a \leq 12$$
$$R_2 : 6 \leq X_b \leq 10$$
$$R_3 : X_a + X_b \geq 20$$

La región factible, definida por nuestras restricciones, es la siguiente:



Ahora evaluamos Z en cada vértice de la región factible:

Vertice	Z
(10,10)	140
(12,10)	156
(12,8)	144

Luego podemos concluir que la solución óptima para Juan es trabajar 10 horas en cada una de las tiendas.

2.6. Ejercicio 7

Enunciado

Una Empresa de informática especializada en auditoría de código fuente va a contratar dos tipos de técnicos (con experiencia y sin experiencia) para atender el control de calidad del código Java realizado. Necesita inspeccionar al menos 2100 clases por día laboral (7 horas). Los técnicos expertos son capaces de inspeccionan 30 clases a la hora con un nivel de seguridad del 98 %, mientras que los técnicos inexpertos sólo inspeccionan 18 clases a la hora con un nivel de seguridad del 95 %. Los sueldos respectivos son de 50 y 30 euros/horas y cada error de inspección supone a la compañía un coste adicional de 5 euros. Si se desea contratar a lo sumo 6 técnicos con experiencia y 10 sin experiencia. ¿cuántos técnicos de cada tipo tiene que contratar la compañía, a fin de minizar el costo total?

Solución

Consideramos los datos del problema.

	Con experiencia	Sin experiencia
Clases por hora	30	18
Sueldo	50euro/hora	30euro/hora
Tasa de error por hora	0’02	0’05

Las variables de nuestro problema son:

X_a = Programadores con experiencia.
X_b = Programadores sin experiencia.

Los coeficientes (Precio por jornada más gasto de errores por jornada):
Para saber los errores por jornada(7 horas) calculamos los errores producidos en una hora, por cada tipo de programador.

Para los programadores expertos que inspecionan 30 clases a la hora con un nivel de seguridad del 98 % pueden tener $0'02 * 30 = 0'6$ errores a la hora.

Y un progrmador inexperto que hace 18 clases a la hora con un nivel de seguridad de 95 % puede tener $0'05 * 18 = 0'9$
En una jornada (7 horas) lo errores de cada uno serán:

	Expertos	Inexpertos
Errores por jornada	4’2	6’3

Por tanto:

$$C_1 : 50 \cdot 7 + 4'2 \cdot 5 = 371$$

$$C_2 : 30 \cdot 7 + 6'3 \cdot 5 = 241'5$$

La función objetivo Z será $Z = X_a \cdot 371 + X_b \cdot 241'5$ Habrá que minimizar la función.

Las restricciones del modelo son las siguientes:

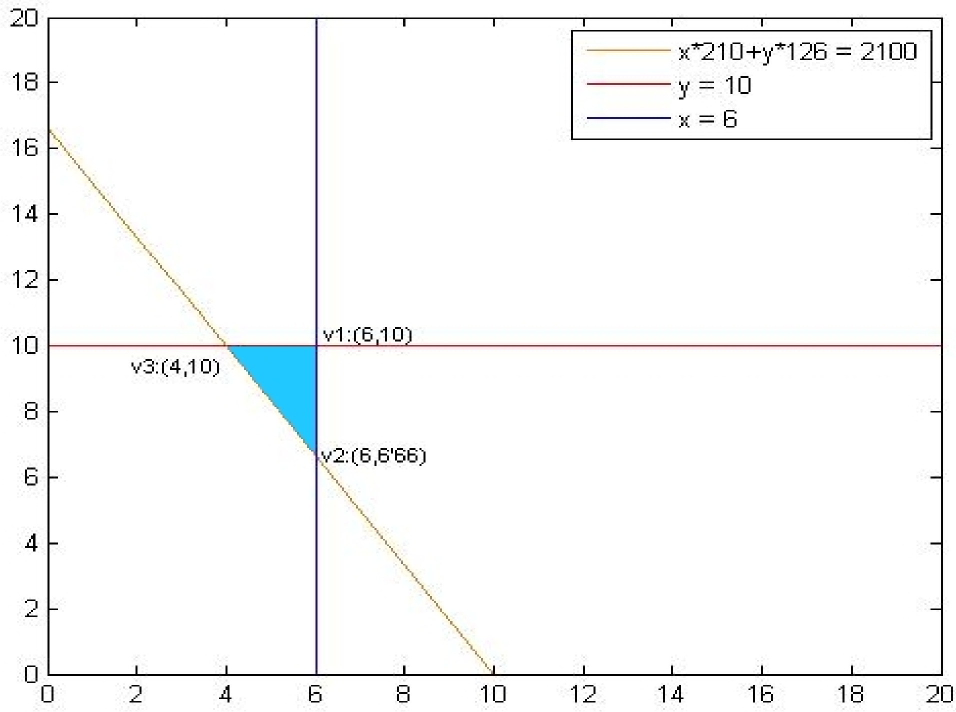
$$R_0 : \ X_a, X_b \geq 0$$

$$R_1 : \ X_a \leq 6$$

$$R_2 : \ X_b \leq 10$$

$$R_3 : \ X_a * (30 * 7) + X_b * (18 * 7) \geq 2100$$

Una vez planteado el problema dibujaremos la gráfica:



La región azul, es la región de soluciones factibles. Lo que se hará ahora será evaluar nuestra función objetivo en los vértices de la gráfica. y tenemos:

Vértices	Valor
(4,10)	3899 Euros
(6,10)	4641 Euros
(6,6’666)	3836 Euros

Por tanto la empresa deberá contratar a 6 expertos y 6’66 inexpertos, pero como no se pueden contratar a 6’66 personas se tiene que si contratamos a 7 el precio del coste ascendería a 3916 Euros y si contratamos sólo a 6 inexpertos el coste sería de 3675 Euros, pero el número de clases a revisar ya no satisfacería la restricción numero tres. Por tanto la mejor solución sería 4 expertos y 10 inexpertos, en este caso el número de clases revisadas por jornada serían 2100, cumpliendo así con los requisitos.