
Investigación Operativa

- Práctica 1 -

Sergio García Mondaray
Rodrigo Testillano Tordesillas



Escuela Superior de Informática de Ciudad Real
Universidad de Castilla-La Mancha

Índice

1. Ejercicio 1	3
1.1. Enunciado	3
1.2. Solución	3
1.3. Código Matlab	4
2. Ejercicio 2	5
2.1. Enunciado	5
2.2. Solución	5
2.3. Código Matlab	7
3. Ejercicio 3	8
3.1. Enunciado	8
3.2. Solución	8
3.3. Código Matlab	10
4. Ejercicio 4	11
4.1. Enunciado	11
4.2. Solución	11
4.3. Código Matlab	12

1. Ejercicio 1

1.1. Enunciado

Florentino Pérez, dispone de 40.000 entradas para los seguidores del Real Madrid que quieran asistir a la final de la Copa del Rey. El precio de cada entrada es de 60 Euros para los socios y 100 Euros para los que no sean socios. Al menos el 25 % deben ser socios. La suma de las entradas de los socios mas la mitad de las de los no socios no puede exceder de 30.000 entradas.

Identifica las posibles soluciones mediante el método gráfico. ¿Número de entradas que vende Florentino a los socios y a los no socios para ganar lo máximo posible? ¿Cuánto gana?

1.2. Solución

1. Identificamos las variables de decisión:

$$\begin{aligned}x_a &= \text{Número de entradas de socios} \\x_b &= \text{Número de entradas de no socios}\end{aligned}$$

2. Definimos la función objetivo (a maximizar):

$$Z = 60x_a + 100x_b$$

3. Identificamos las restricciones del problema:

$$\begin{aligned}R0 : x_a, x_b &\geq 0 \\R1 : x_a &\geq 0,25(x_a + x_b) \\R2 : x_a + \frac{1}{2}x_b &\leq 30000 \\R3 : x_a + x_b &\leq 40000\end{aligned}$$

4. Identificamos la región factible, a partir de la representación gráfica de las restricciones, y representamos las rectas de nivel:

Ver figura 1

Los vértices del polígono, así como los valores que toma la función objetivo en ellos, son los siguientes:

$$\begin{aligned}A &= (10000, 30000) \Rightarrow Z(A) = 3600000 \\B &= (20000, 20000) \Rightarrow Z(B) = 3200000 \\C &= (30000, 0) \Rightarrow Z(C) = 1800000 \\D &= (40000, 0) \Rightarrow Z(D) = 2400000\end{aligned}$$

Podemos observar que la función toma el máximo valor en el punto A, luego la solución óptima es:

$\begin{aligned}x_a &= 10000 \\x_b &= 30000\end{aligned}$

Florentino obtiene unos beneficios de 3600000.

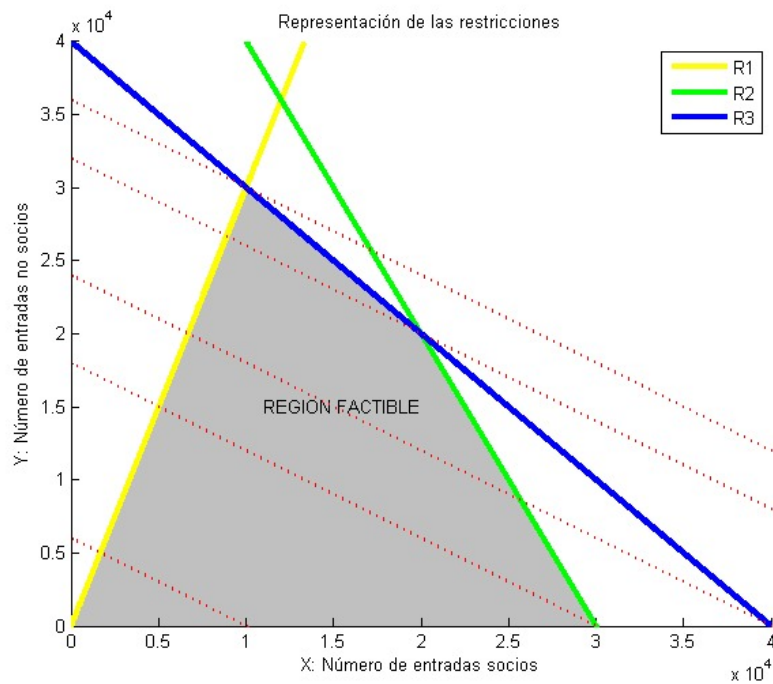


Figura 1: Restricciones y rectas de nivel del ejercicio 1

1.3. Código Matlab

Fragmento de código 1: Código del ejercicio 1

```

1  clf;
2  xlabel('X: Nmero de entradas socios')
3  ylabel('Y: Nmero de entradas no socios')
4  title('Representacin de las restricciones')
5  hold on
6  n=0:40000;
7  % 1) Restricciones
8  %R1
9  axis([0,40000,0,40000]);
10 i = 0.25*40000;
11 plot(n, (0.75*n)/0.25, 'y');
12
13 %R2
14 plot(n, ((30000-n)*2), 'g');
15
16 %R3
17 plot(n, (40000-n), 'b');
18
19 %Opciones de grafica
20 text(11000,15000,'REGION FACTIBLE');
21 legend('R1','R2','R3');
22
23 %Puntos de corte
24

```

```

25 %R1 con eje x->(10000,0)
26 %R2 con eje x->(30000,0)
27 %R3 con eje x->(40000,0)
28 %R1 con R3 ->(10000,30000)
29 %R3 con R2 ->(20000,20000)
30 %R1 con R2->(10000,40000) fuera de region factible
31
32 %Rectas de Nivel
33 z = 10000*60+30000*100
34 y = (z-60*n)/100;
35 plot(n,y,'r');
36
37 z = 20000*60+20000*100
38 y = (z-60*n)/100;
39 plot(n,y,'r');
40
41 z = 10000*60+0*100
42 y = (z-60*n)/100;
43 plot(n,y,'r');
44 z = 30000*60+0*100
45 y = (z-60*n)/100;
46 plot(n,y,'r');
47 z = 40000*60+0*100
48 y = (z-60*n)/100;
49 plot(n,y,'r');
50
51 %Tendr que vender para maximizar sus objetivos 10000 entradas a
    socios y
52 %30000 a no socios

```

2. Ejercicio 2

2.1. Enunciado

En una gasolinera se guarda gasóleo y gasolina. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de gasóleo y 40 gasolina y, además, el número de bidones de gasolina no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de gasóleo. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de combustible (1 unidad monetaria). ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo?

2.2. Solución

1. Planteamos las variables de decisión:

$$x_1 = \text{numero de bidones de gasoleo}$$

$$x_2 = \text{numero de bidones de gasolina}$$

2. Planteamos la función a optimizar, y la ecuación de las rectas de nivel:

$$Z = x_1 + x_2 \Rightarrow \text{recta} = -x_1 + n$$

3. Planteamos las restricciones del problema:

$$R0 : x_1, x_2 \geq 0$$

$$R1 : x_1 \geq 20$$

$$R2 : x_2 \geq 40$$

$$R3 : x_2 \geq x_1/2$$

$$R4 : x_1 + x_2 \leq 150$$

4. Localizamos la región factible, en base a la representación gráfica de las restricciones anteriores:

Ver figura 2

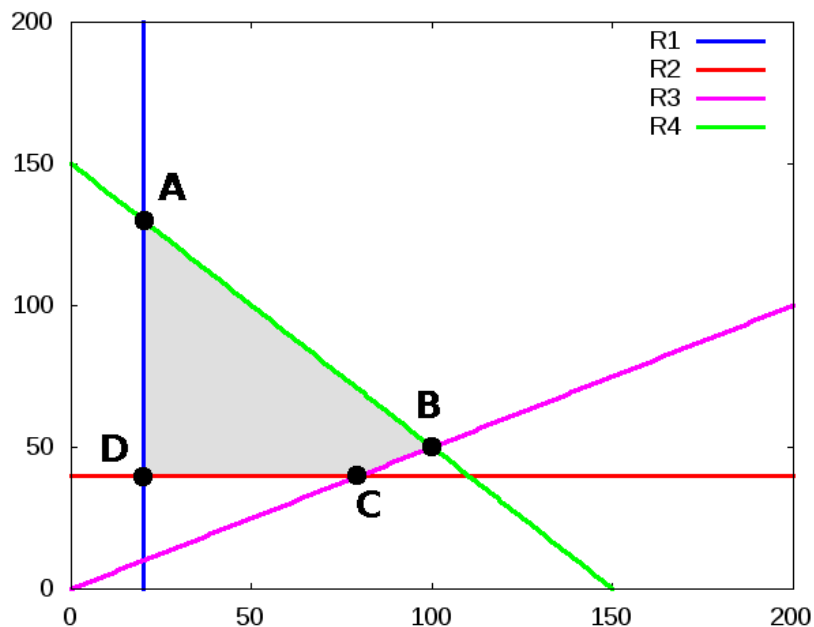


Figura 2: Restricciones del ejercicio 2

5. Calculamos los vértices del polígono, que constituye la región factible, y calculamos la ordenada en el origen que tendría la recta de nivel que pase por cada punto:

$$A = (20, 130) \Rightarrow n = 150$$

$$B = (100, 50) \Rightarrow n = 150$$

$$C = (80, 40) \Rightarrow n = 120$$

$$D = (20, 40) \Rightarrow n = 60$$

6. Ahora trazamos las rectas de nivel:

Ver figura 3

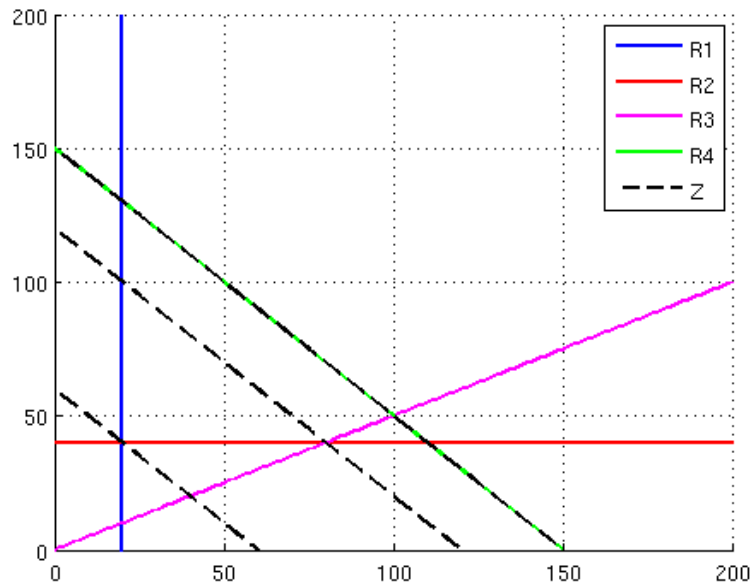


Figura 3: Rectas de nivel del ejercicio 2

Podemos observar que existen infinitas soluciones, puesto que la recta de nivel con mayor ordenada en el origen (que, en principio, sería nuestra solución) se superpone al lado del polígono definido por $R4$. Podíamos habernos dado cuenta sin necesidad de representar las rectas, puesto que para los vértices A y B habíamos obtenido el mismo valor de n en el apartado 5.

Una de esas infinitas soluciones podría ser:

$$\begin{aligned} x_1 &= 20 \\ x_2 &= 130 \end{aligned}$$

2.3. Código Matlab

Fragmento de código 2: Código del ejercicio 2

```

1  % Variables:
2  % x1 = numero de bidones de gasoleo
3  % x2 = numero de bidones de gasolina
4
5  % Funcion objetivo (maximizar):
6  % Z = x1 + x2 => recta = -x1 + n
7
8  % Restricciones:
9  % R0: x1, x2 >= 0
10 % R1: x1 >= 20
11 % R2: x2 >= 40
12 % R3: x2 >= x1/2
13 % R4: x1 + x2 <= 150

```

```

14
15 x = 0:200;
16 hold on;
17 grid on;
18 plot([20,20],[0,1000], 'b', 'LineWidth', 2);
19 plot([0,1000],[40,40], 'r', 'LineWidth', 2);
20 plot(x,0.5*x, 'm', 'LineWidth', 2);
21 plot(x,150-x, 'g', 'LineWidth', 2);
22
23 % Los vertices del poligono son:
24 % A = (20,130)
25 % B = (100, 50)
26 % C = (80, 40)
27 % D = (20,40)
28
29 % Dibujamos las rectas de nivel de Z que pasan por los vertices:
30 % x2 = -x1 + n => n = x2 + x1
31 % Para A = (20, 130) => n = 150
32 plot(x, -x + 150, 'k--', 'LineWidth', 2);
33 % Para B = (100, 50) => n = 150
34 plot(x, -x + 150, 'k--', 'LineWidth', 2);
35 % Para C = (80, 40) => n = 120
36 plot(x, -x + 120, 'k--', 'LineWidth', 2);
37 % Para D = (20, 40) => n = 60
38 plot(x, -x + 60, 'k--', 'LineWidth', 2);
39
40
41 axis([0,200,0,200]);
42 legend('R1','R2','R3','R4','Z');
43 hold off;

```

3. Ejercicio 3

3.1. Enunciado

Minimizar

$$g(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
 R1 &: x_1 + x_2 \geq 5 \\
 R2 &: x_2 \leq x_1 + 3 \\
 R3 &: 3x_2 - x_1 \geq -1 \\
 R4 &: x_2 + 2x_1 \leq 16 \\
 R5 &: 4x_2 - x_1 \leq 22
 \end{aligned}$$

3.2. Solución

1. Planteamos la ecuación de las rectas de nivel:

$$recta = \frac{-3x_1 + n}{3}$$

2. Representamos las restricciones para obtener la región factible:

Ver figura 4

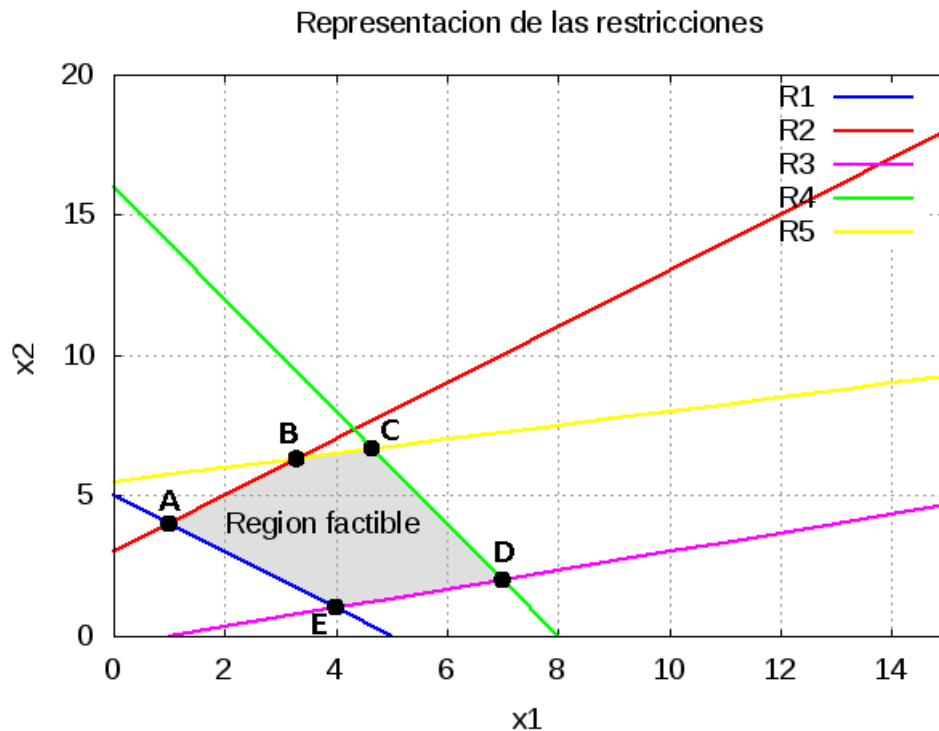


Figura 4: Restricciones del ejercicio 3

3. Obtenemos los vértices y calculamos la ordenada en el origen n de la recta que pasa por cada uno de ellos:

$$A = (1, 4) \Rightarrow n = 15$$

$$B = (3,33, 6,33) \Rightarrow n = 28,98$$

$$C = (4,67, 6,67) \Rightarrow n = 34,02$$

$$E = (4, 1) \Rightarrow n = 15$$

4. Representamos las rectas de nivel:

Ver figura 5

Como se trata de minimizar la función objetivo, nos quedamos con el vértice por donde pasa la recta de menor ordenada en el origen. En este caso tenemos infinitas soluciones, puesto que esa recta corresponde a uno de los lados del polígono.

Una de esas soluciones podría ser la que pasa por el punto A:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

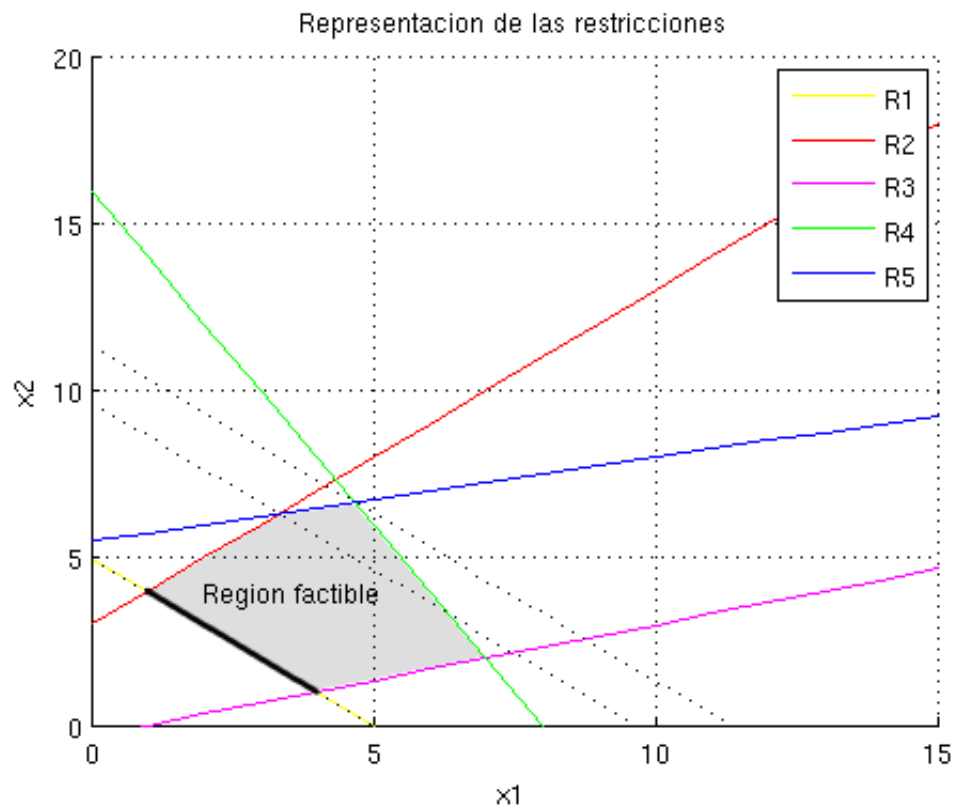


Figura 5: Rectas de nivel del ejercicio 3

3.3. Código Matlab

Fragmento de código 3: Código del ejercicio 3

```

1  % Funcion objetivo (minimizar):
2  %   g(x1,x2) = 3*x1 + 3*x2  --> Z = (-3*x1 + n)/3
3
4  % Restricciones:
5  %   R0: x1, x2 >= 0
6  %   R1: x1 + x2 >= 5      --> x2 = 5 - x1
7  %   R2: x2 <= x1 + 3     --> x2 = x1 + 3
8  %   R3: 3*x2 - x1 >= -1  --> x2 = (-1 + x1)/3
9  %   R4: x2 + 2*x1 <= 16  --> x2 = 16 - 2*x1
10 %   R5: 4*x2 - x1 <= 22  --> x2 = (22 + x1)/4
11
12 x1 = 0:100;
13
14 clf;
15 hold on;
16 plot(x1, 5 - x1, 'y');
17 plot(x1, x1 + 3, 'r');
18 plot(x1, (-1 + x1)/3, 'm');
19 plot(x1, 16 - 2*x1, 'g');
20 plot(x1, (22 + x1)/4, 'b');

```

```

21 legend('R1', 'R2', 'R3', 'R4', 'R5');
22 title('Representacion de las restricciones');
23 text(2,4,'Region factible');
24 xlabel('x1');
25 ylabel('x2');
26 grid on;
27
28
29 % Los vertices de la region factible son los siguientes puntos de
    corte de las restricciones:
30 % R1 con R2 -> A = (1,4)
31 % R2 con R5 -> B = (3.33,6.33)
32 % R4 con R5 -> C = (4.67,6.67)
33 % R4 con R3 -> D = (7,2)
34 % R1 con R3 -> E = (4,1)
35
36 % Dibujamos las rectas de nivel que pasan por los vertices:
37 % Z: (-3*x1 + n)/3 = x2 => n = 3*x2 + 3*x1
38 % Para A = (1,4) => n = 12 + 3 = 15;
39 plot(x1, (-3*x1 + 15)/3, 'k:');
40 % Para B = (3.33,6.33) => n = 9.99 + 18.99 = 28.98;
41 plot(x1, (-3*x1 + 28.98)/3, 'k:');
42 % Para C = (4.67, 6.67) => n = 34.02;
43 plot(x1, (-3*x1 + 34.02)/3, 'k:');
44 axis([0,15,0,20]);

```

4. Ejercicio 4

4.1. Enunciado

Una campaña se basa en el reparto gratuito de chocolate sólo y con almendras. Se decide repartir al menos 10000 tabletas, y al menos la mitad con almendras. Cada tableta de chocolate sólo necesita para su elaboración 0.65 gramos de cacao y cada tableta de chocolate con almendras necesita 0.25 gramos de este mismo producto. Se dispone de 5 kg. de cacao. El coste de producción de una tableta de chocolate con almendras es de 0,4 euros y 0,2 euros una de chocolate sólo. El objetivo es la minimización de costes de la campaña.

4.2. Solución

1. Planteamos las variables de decisión:

x_a = Cantidad de tabletas de chocolate

x_b = Cantidad de tabletas de chocolate con almendras

2. Definimos la función objetivo (a minimizar):

$$Z = 0'2x_a + 0'4x_b$$

3. Identificamos las restricciones del problema:

$$R0 : x_a, x_b \geq 0$$

$$R1 : x_a + x_b \geq 10000$$

$$R2 : x_b \geq \frac{x_a + x_b}{2}$$

$$R3 : 0'65x_a + 0'25x_b \leq 5000$$

4. Encontramos la región factible, a partir de la representación gráfica de las restricciones. Después representamos las rectas de nivel que pasan por cada uno de los vértices de la región factible.

Ver figura 6

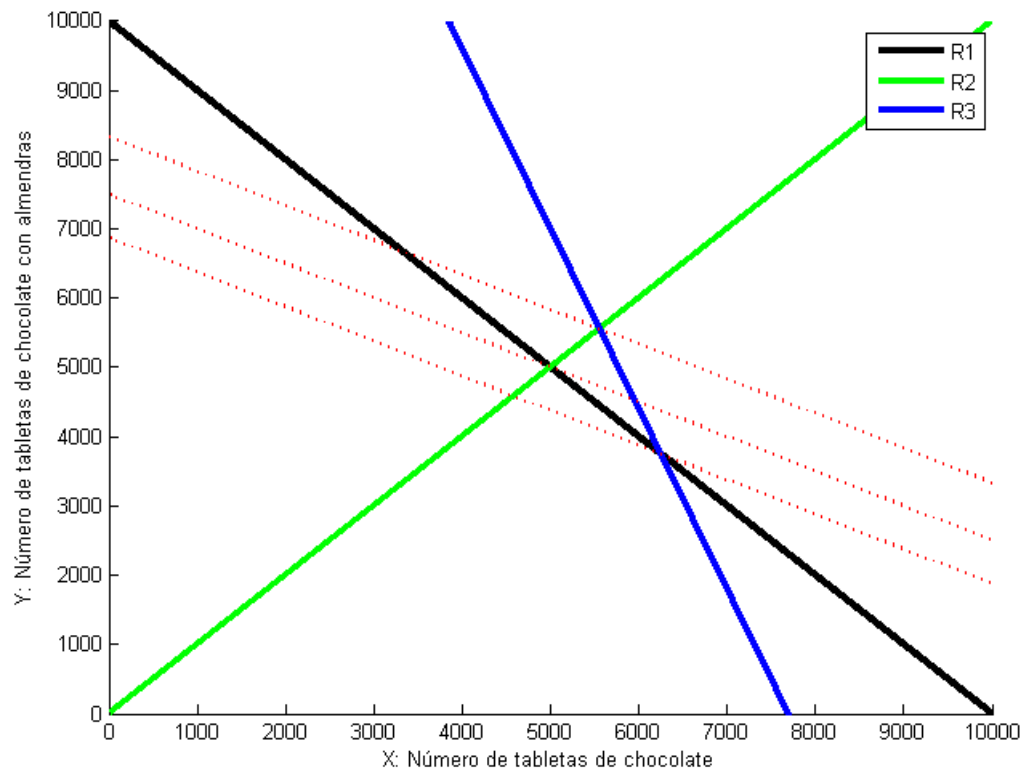


Figura 6: Restricciones y rectas de nivel del ejercicio 4

Los valores que minimizan la función son:

$$\begin{aligned} x_a &= 5000 \\ x_b &= 5000 \end{aligned}$$

4.3. Código Matlab

Fragmento de código 4: Código del ejercicio 4

```
1  clf;
2  %Opciones de grafica
3
4  xlabel('X: Nmero de tabletas de chocolate')
5  ylabel('Y: Nmero de tabletas de chocolate con almendras')
6  text(200,12000,'REGION FACTIBLE');
7  hold on
8  n=0:20000;
9  axis([0,10000,0,10000]);
10 % 1) Restricciones
11 %R1
12 plot(n, (10000-n), 'black');
13
14 %R2
15 plot(n,n, 'g');
16
17 %R3
18 plot(n, (5000-0.65*n)/0.25, 'b');
19
20
21 legend('R1', 'R2', 'R3');
22
23 %Puntos de corte
24
25 %R1 con R3 -> (6250, 3750)
26 %R3 con R2 -> ((5000/0.90), (5000/0.90))
27 %R1 con R2-> (5000, 5000)
28
29 %Rectas de Nivel
30 z = 5000*0.2+5000*0.4
31 y = (z-0.2*n)/0.4;
32 plot(n,y, 'r');
33
34 z = 6250*0.2+3750*0.4
35 y = (z-0.2*n)/0.4;
36 plot(n,y, 'r');
37
38 z = (5000/0.90)*0.2+(5000/0.90)*0.4
39 y = (z-0.2*n)/0.4;
40 plot(n,y, 'r');
41
42
43
44 %Tendr que vender para minimizar el coste 5000 tabletas de
    chocolate solo
45 %y otras 5000 de almendras.
```