Investigación Operativa

Entrega de problemas 3

Sergio García Mondaray
04621336-S

Escuela Superior de Informática de Ciudad Real
Universidad de Castilla-La Mancha

Índice general

1 Resumen de teoría

1.1 Nuevas restricciones

Cuando en un problema de programación lineal resuelto se incluye una nueva restricción, se debe comprobar si el resultado sigue sirviendo o hay que empezar de nuevo.

El nuevo problema contará con un nuevo sistema de ecuaciones, cuyo conjunto de soluciones estará incluido en el conjunto de soluciones del problema original. La función objetivo permanece inalterable. Si la solución anterior satisface la nueva restricción, entonces seguirá siendo la solución óptima, en caso contrario se deberá calcular.

Casos posibles

Nos podemos encontrar con los siguientes casos posibles:

- La nueva restricción es satisfecha con los valores óptimos de la solución anterior: la solución actual sigue siendo la misma.
- La nueva restricción no es satisfecha con los valores óptimos de la solución anterior: la nueva solución debe ser calculada, a partir del nuevo conjunto de restricciones.
- La nueva restricción es de desigualdad: aparece una nueva variable de holgura, que participará en la nueva solución. Cabe destacar que si, al integrarse esta variable de holgura en el sistema de ecuaciones, obtiene como resultado un valor negativo, la solución obtenida no es factible, y no se puede resolver con el algoritmo del Simplex.

1.2 Cambios en los recursos

Si cambian los recursos, varía tanto el valor de las variables básicas como el de la función objetivo, por lo que se pone en riesgo la factibilidad.

Deberemos comprobar si la solución óptima anterior sigue siendo óptima y, si no es el caso, muy posiblemente la solución dejará de ser factible; lo siguiente será averiguar el rango en el que se puede mover b_j sin que afecte a la factibilidad del problema.

1.2.1 Nuevo vector de recursos

Según el efecto del cambio de una restricción podemos distinguir dos tipos de restricciones, según si su modificación altera o no la solución óptima:

- **Restricción obligatoria:** su modificación altera la solución óptima. Una restricción es obligatoria si la solución óptima está sobre ella (en un punto de corte con otra restricción).
- **Restricción no obligatoria:** su modificación no altera la solución óptima. Corresponde a aquellas restricciones que no incluyen la solución óptima.

Dado que el cambio afecta a las soluciones del sistema, necesitaremos obtener nuestra nueva solución óptima. El proceso es el siguiente:

1. Nos fijamos en qué valores han cambiado
2. Calculamos el nuevo vector columna b' y los valores de las variables básicas:

$$X^{b'} = B^{-1} \cdot b_{\text{optimo}}$$

3. Si todos los valores de X^b son positivos tendremos una solución óptima. En caso contrario aplicamos el algoritmo dual del Simplex.

1.2.2 Intervalos de variación

¿Cuánto podremos ampliar o reducir la región factible para que nuestra solución siga siendo factible (que quizá no óptima)?.

Para cualquier b_j, su *intervalo permisible para permanecer factible* es el intervalo de valores sobre el que la solución BF óptima permanece factible (con los valores ajustados para las variables básicas).

Los valores ajustados para las variables básicas se obtienen a partir de la fórmula:

$$b' = B^{-1} \cdot b$$

2 Ejercicio 2

2.1 Enunciado

Se considera el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } Z = 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} R1 &: \ -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 9 \\ R2 &: \ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 22 \\ R0 &: \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución óptima es (19,8,0,0). Supongamos que se añade, según el caso, cada una de las siguientes restricciones:

(a) $x_1 + 4x_2 - 14x_3 - 2x_4 \leq -15$

(b) $5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 \geq 6$

(c) $-x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 \geq 7$

(d) $4x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 6$

Para cada una de ellas, compruebe si se conserva la optimalidad de la solución y, si es así, obtenga el valor de la variable de holgura introducida en las restricciones (si se da el caso).

2.2 Solución

Caso (a)

1. Comprobamos si (19,8,0,0) sigue siendo siendo solución óptima, una vez añadida la nueva restricción. Para ello comprobamos si la satisface:

$$18 + 4 \cdot 8 - 14 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 50 \not\leq -15$$

2. Como (19,8,0,0) no satisface la nueva restricción, habría que resolver el nuevo problema.

Caso (b)

1. Comprobamos si (19,8,0,0) sigue siendo siendo solución óptima, una vez añadida la nueva restricción. Para ello comprobamos si la satisface:

$$5 \cdot 19 + 3 \cdot 8 - 6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 119 \geq 6$$

2. Como (19,8,0,0) cumple la nueva restricción, la solución óptima sigue siendo: (19,8,0,0)
3. Calculamos la variable de holgura x_5:

$$119 - x_5 = 6 \Rightarrow x_5 = 119 - 6 = 113$$

Caso (c)

1. Comprobamos si (19,8,0,0) sigue siendo siendo solución óptima, una vez añadida la nueva restricción. Para ello comprobamos si la satisface:

$$-19 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = -3 \not\geq 7$$

2. Como (19,8,0,0) no satisface la restricción, tendríamos que resolver el nuevo problema.

Caso (d)

1. Comprobamos si (19,8,0,0) sigue siendo siendo solución óptima, una vez añadida la nueva restricción. Para ello comprobamos si la satisface:

$$4 \cdot 19 - 8 + 5 \cdot 0 - 0 \neq 6$$

2. Como (19,8,0,0) no satisface la nueva restricción, tendríamos que resolver el nuevo problema.

3 Ejercicio 3

3.1 Enunciado

Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
&3x_1 + 4x_2 \leq 3 \\
&-x_1 + x_2 \geq -4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

A continuación investigue los cambios que se producen en la solución óptima cuando se cambian los recursos a:

a) $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) $b = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

c) $b = \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$

3.2 Solución

En primer lugar calculamos la solución óptima del problema original, a través del algoritmo del Simplex. La última tabla es la siguiente:

C^B	X^B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	B
0	x_3	5	2	1	0	0	5
0	x_4	3	4	0	1	0	3
0	x_5	1	-1	0	0	1	4
	Z	3	4	0	0	0	0

De donde podemos observar la matriz B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora estudiamos los cambios indicados:

a) $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$X^{b'} = B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La solución básica actual es (10,2,10,0,0), que pasa la prueba de factibilidad, puesto que todos los elementos son positivos.

b) $b = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$X^{b'} = B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

En este caso, (-10,2,-10,0,0) no pasa la prueba de factibilidad, ya que hay elementos negativos.

c) $b = \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$X^{b'} = B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior, (12, -15, 14,0,0) no pasa la prueba de factibilidad, puesto que tiene elementos negativos.

4 Ejercicio 4

4.1 Enuciado

Maximizar $Z = 15x_1 + 10x_2$.

sujeto a:

$$2x_1 + x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resuelva los siguientes apartados:

- Resuelva el problema

- Obtenga los intervalos de variación de los recursos para que la solución óptima siga siendo factible.
- Obtenga los cambios producidos al considerar una nueva variable x_3, con los coeficientes que se dan en los siguientes casos:

  $c_3 = 5, a_{13} = 3, a_{23} = 1, a_{33} = 0$

  $c_3 = 2, a_{13} = 0, a_{23} = 2, a_{33} = 1$

4.2 Solución

Primer apartado

Mediante la resolución del algoritmo del simplex, la solución del problema es:

$$Z = 13500$$

$$x_1 = 300$$

$$x_2 = 900$$

La tabla final del simplex es:

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	B	Operación
10	x_2	0	1	-1	2	0	900	
0	x_5	0	0	-1	1	1	200	
15	x_1	1	0	1	-1	0	300	
-	Z	15	10	5	5	0	13500	-
-	Z - C_i	0	0	5	5	0	-	-

Segundo apartado

Hay que obtener los intervalos de variacion de b_1, b_2 y b_3

$$B^{-1}b^{\Delta} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500+\Delta \\ 1200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900-\Delta \\ 200-\Delta \\ 300+\Delta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos las ecuaciones:

$$900 - \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 900$$
$$200 - \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 200$$
$$300 + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq -300$$

En conlusión $\Delta \in [-300, 200]$ y por lo tanto como b_1 en principio es 1500: $b_1 \in [1200, 1700]$

$$B^{-1}b^{\Delta} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200+\Delta \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900+\Delta \\ 200+\Delta \\ 300-\Delta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos las ecuaciones:

$$900 + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq -900$$
$$200 + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq -200$$
$$300 - \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 300$$

En conlusión $\Delta \in [-200, 300]$ y por lo tanto como b_2 en principio es 1200: $b_2 \in [1000, 1500]$

$$B^{-1}b^{\Delta} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 500 + \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 200 + \Delta \\ 300 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos las ecuaciones:

$$200 + \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq -200$$

En conlusión $\Delta \in [-200, \infty]$ y por lo tanto como b_3 en principio es 500: $b_3 \in [300, \infty]$

Tercer Apartado

$$\text{Para } c_3 = 5 \text{ y } a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora obtenemos el vector columna correspondiente;

$$y_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora lo añadimos en la tabla del simplex:

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	B
10	x_2	0	1	-1	2	0	-1	900
0	x_5	0	0	-1	1	1	-2	200
15	x_1	1	0	1	-1	0	2	300
-	Z	15	10	5	5	0	20	13500
-	Z - C_i	0	0	5	5	0	15	-

Como no hay valores negativos la solución sigue siendo óptima.

Para $c_3 = 2$ y $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ahora obtenemos el vector columna correspondiente;

$$y_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora lo añadimos en la tabla del simplex:

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	B
10	x_2	0	1	-1	2	0	4	900
0	x_5	0	0	-1	1	1	3	200
15	x_1	1	0	1	-1	0	-2	300
-	Z	15	10	5	5	0	10	13500
-	Z - C_i	0	0	5	5	0	5	-

Como no hay valores negativos la solución sigue siendo óptima.

5 Ejercicio 5

5.1 Enuciado

Resuelva el siguiente PPL:

Maximizar $Z = 2x_1 - x_2 + 4x_4$

sujeto a:

$$8x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 45x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -3x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

A continuación calcule la solución óptima si cambiamos la función objetivo por $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

5.2 Solución

Resolvemos el problema por simplex y tenemos la siguiente solución:

$$x_1 = 0, x2 = 0, x_3 = 1Z = 4$$

La tabla final del simplex es:

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	B
0	x_4	10'5	8	0	1	0.5	0	5
4	x_3	2.5	2	1	0	0.5	0	1
0	x_6	6.5	7	0	0	1.5	1	6
-	Z	10	8	0	0	2	0	4
-	Z - C_i	8	9	0	0	2	0	-

Para el siguiente apartado, lo que se hace es cambiar los coeficientes de la función objetivo y realizar los cálculos en la nueva tabla:

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	B
0	x_4	10'5	8	0	1	0.5	0	5
3	x_3	2.5	2	1	0	0.5	0	1
0	x_6	6.5	7	0	0	1.5	1	6
-	Z	7.5	6	0	0	1.5	0	3
-	Z - C_i	5.5	7	0	1.5	0	0	-

Ha cambiado el valor óptimo a un valor de $Z = 3$

6 Ejercicio 6

6.1 Enunciado

Una cooperativa tiene una capacidad de producción diaria de 120 botellas de vino de crianza y 360 de vino de mesa. Cada botella es sometida a un control de calidad y supervisión, siendo la capacidad de control de 200 botellas al día. El vino de crianza se vende en el mercado a un precio cuatro veces superior al vino de mesa.

- Determine la producción de la cooperativa que hace posible maximizar el beneficio mediante el algoritmo del Simplex.
- Obtenga los intervalos de variación de los coeficientes b de las restricciones (b1, b2) para que el problema siga siendo factible.
- Calcule la solución óptima reutilizando los cálculos del apartado a) en el caso de que la capacidad máxima de producción aumente a 150 botellas de vino de crianza y 370 botellas en vino de mesa, y 230 en el control de calidad. Si no se pueden reutilizar los resultados del apartado a) resolver el nuevo problema desde el principio.
- Calcule la nueva solución reutilizando los cálculos del apartado a) si el producto A se vende en el mercado con un precio 3 veces superior al del B. Si no se puede reutilizar resolver el nuevo problema resolver el problema desde el principio.

6.2 Solución

Primer apartado

Las variables de decisión son: x_1 :Botellas de vino de crianza

x_2 :Botellas de vino de mesa

La restricciones del problema serán:

- $R_1 : x_1 \leq 120$
- $R_2 : x_2 \leq 360$
- $R_3 : x_3 \leq 200$

- $x_1, x_2 \geq 0$

La solución por el método del simplex es:

$$Z = 560$$
$$x_1 = 120$$
$$x_2 = 80$$

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	B	
4	x_1	1	0	1	0	0	120	
0	x_4	0	0	1	1	-1	280	
1	x_2	0	1	-1	0	1	80	
-	Z	4	1	3	0	1	560	
-	Z - C_i	0	0	3	0	1		-

Segundo Apartado

Para b_1

$$B^{-1}b^{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120+\Delta \\ 360 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120+\Delta \\ 280+\Delta \\ 80-\Delta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos las ecuaciones:

$$120+\Delta \geq 0 \text{ entonces } \Delta \geq -120$$
$$280+\Delta \geq 0 \text{ entonces } \Delta \geq -280$$
$$80-\Delta \geq 0 \text{ entonces } \Delta \leq 80$$

En conlusión $\Delta \in [-120, 80]$ y por lo tanto como b_1 en principio es 120: $b_1 \in [0, 200]$

Para b_2

$$B^{-1}b^{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 360+\Delta \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\ 280+\Delta \\ 80 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos las ecuaciones:

$$280+\Delta \geq 0 \text{ entonces } \Delta \geq -280$$

En conlusión $\Delta \in [-280, \infty]$ y por lo tanto como b_2 en principio es 360: $b_2 \in [80, \infty]$

Para b_3

$$B^{-1}b^{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 360 \\ 200+\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 280 \\ 80+\Delta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos las ecuaciones:

$$280 + \Delta \geq 0 \text{ entonces} \geq -280$$
$$80 + \Delta \geq 0 \text{ entonces} \geq -80$$

En conlusión $\Delta \in [-80, \infty]$ y por lo tanto como b_3 en principio es 200: $b_3 \in [120, \infty]$

Tercer Apartado

En primer lugar realizamos el cambio b(120,360,200) por b'(150,370,230).

Ahora para poder obtener los valores delas variables básicas en la tabla del Simplex de la solución óptima debemos multiplicar por B^{-1} por el nuevo vec tor que queremos introducir.

$$X^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 370 \\ 230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 290 \\ 80 \end{bmatrix}$$

La nueva solución óptima será: $Z = 680$

Cuarto Apartado

La nueva función objetivo sería: $Z = 3x_1 + x_2$

Modificamos la tabla final con los valores de la nueva función objetivo, si no salen valores negativos en la última fila la solución será óptima, si no habría que repetir el proceso.

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	B	
3	x_1	1	0	1	0	0	120	
0	x_4	0	0	1	1	-1	280	
1	x_2	0	1	-1	0	1	80	
-	Z	3	1	2	0	1	440	
-	Z - C_i	0	0	2	0	1		-

7 Ejercicio 7

7.1 Enunciado

Un dentista emplea a tres asistentes. En los dos sillones de su consulta se realizan trabajos de endodoncia y estomatología general. Un servicio de endodoncia requiere 0.75 horas de sillón, 1.5 de trabajo de un asistente y 0.25 horas de trabajo del dentista. Un servicio de estomatología general requiere, respectivamente, 0.75 horas, 1 hora y 0.5 horas. Por cada servicio de endodoncia se obtiene un beneficio de 30 euros y por cada servicio de estomatología general 24 euros. Si tanto el dentista como sus asistentes trabajan 8 horas diarias. Utilizando el método simplex y el análisis de sensibilidad visto en clase responder a las siguientes consultas:

(a) ¿Cómo debe distribuirse el trabajo, entre endodoncias y sesiones de estomatología general, para que el beneficio diario sea máximo?

(b) Calcule los intervalos de los coeficientes en la función objetivo de las endodoncias y estomatologías.

(c) Calcule la solución óptima reutilizando el cálculo anterior si las endodoncias pasan a valer 38 euros y las estomatologías 22 euros. Si no se puede reutilizar resolver el nuevo problema resolver el problema desde el principio.

(d) Obtenga los intervalos de variación de los coeficientes b de las restricciones (b1, b2, b3) para que el problema siga siendo factible.

(e) Calcule la solución optima del problema original en el caso de que se contrate un asistente más y se ponga un sillón más reutilizando el calculo del apartado a. Si no se puede reutilizar resolver el nuevo problema resolver el problema desde el principio.

(f) Obtenga los cambios producidos al insertar en el problema original la optimización del número de extracciones dentales teniendo en cuenta que requiere 0,5 horas de sillón, 1 hora de trabajo de asistente y 0,5 horas de dentista y tiene un precio de 27 euros.

7.2 Solución

Antes de nada identificamos las variables de decisión y las restricciones del problema:

$$x_1 = \text{trabajos de endodoncia}; \quad x_2 = \text{trabajos de estomatología}$$

$$\begin{aligned} R0 &: \; x_1, x_2 \geq 0 \\ R1 &: \; 0'75x_1 + 0'75x_2 \leq 16 \\ R2 &: \; 1'5x_1 + x_2 \leq 24 \\ R3 &: \; 0'25x_1 + 0'5x_2 \leq 8 \end{aligned}$$

a) Definición de la función objetivo:

$$Z = 30x_1 + 24x_2$$

Resolviendo por el algoritmo del simplex, llegamos a la solución óptima:

$$\boxed{\text{Z=528}; \; \text{x}_1 = 8; \; x_2 = 12} \Rightarrow (8, 12, 0, 0, 0)$$

Donde, en la última tabla, podemos observar la matriz B^{-1}:

	Cb	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	B
x3	0	0	0	1	-0.375	-0.75	1
x1	30	1	0	0	1	-2	8
x2	24	0	1	0	-0.5	3	12
	Z	0	0	0	18	12	528

b) Intervalos de variación de los coeficientes de la función objetivo:

c) Cálculo de la solución óptima si ahora $Z = 38x_1 + 22x_2$:

A partir de la tabla del Simplex, cambiamos los coeficientes de Z por los nuevos y estudiamos si la nueva solución es válida.

	Cb	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	B
x3	0	0	0	1	-0.375	-0.75	1
x1	38	1	0	0	1	-2	8
x2	22	0	1	0	-0.5	3	12
	Z	0	0	0	27	-10	568

Como en la última fila hay valores negativos, la solución que antes era óptima no nos sirve.

Resolviendo el nuevo problema por el algoritmo del simplex, obtenemos:

$$\boxed{\text{Z=608; } \mathrm{x}_1 = 16,\ x_2 = 0}$$

d) Intervalos de variación de los coeficientes b:

Definimos B^{-1} y b, a partir de la última tabla del Simplex y del enunciado:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.375 & -0.75 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -0.5 & 3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $b' = B^{-1} \cdot b$:

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 16+\Delta \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\Delta \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta \geq -1 \Rightarrow \Delta \in [-1, \infty) \Rightarrow \boxed{\mathrm{b}_1 \in [15, \infty)}$$

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 24+\Delta \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\Delta-8}{8} \\ \Delta+8 \\ -\frac{\Delta-24}{2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta \begin{cases} \Delta \leq \frac{8}{3} \\ \Delta \geq -8 \\ \Delta \leq -24 \end{cases} \Rightarrow \Delta \in \left[-8, \frac{8}{3}\right] \Rightarrow \boxed{\mathrm{b}_2 \in \left[16, \frac{80}{3}\right]}$$

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 8+\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\Delta-28}{4} \\ 24-2\Delta \\ 3\Delta-12 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq \frac{28}{3} \\ \Delta \leq 12 \\ \Delta \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \Delta \in \left[4, \frac{28}{3}\right] \Rightarrow \boxed{\mathrm{b}_3 \in \left[12, \frac{52}{3}\right]}$$

e) Contratando un asistente más, y añadiendo un nuevo sillón:

$$b' = \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el vector de variables básicas:

$$X^{B'} = B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 1 & -0.375 & -0.75 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -0.5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Como todas tienen valor positivo, tenemos una nueva solución óptima válida:

$$\boxed{(8,16,6,0,0)}$$

f) Ahora en el problema inicial insertamos una nueva variable x_6 y modificamos las restricciones y la función objetivo:

$$Z = 30x_1 + 24x_2 + 27x_6$$

$$\begin{aligned} R0: &\ x_1, x_2, x_6 \geq 0 \\ R1: &\ 0'75x_1 + 0'75x_2 + 0.5x_6 \leq 16 \\ R2: &\ 1'5x_1 + x_2 + x_6 \leq 24 \\ R3: &\ 0'25x_1 + 0'5x_2 + 0'5x_6 \leq 8 \end{aligned}$$

La solución del problema original, tal y como vimos en el apartado (a), es (18,2,0,0,0).

En la última tabla del Simplex, añadimos la fila correspondiente a la nueva variable:

$$C6 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y6 = B^{-1} \cdot C6 = \begin{pmatrix} 1 & -0.375 & -0.75 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -0.5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

	Cb	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	B
x3	0	0	0	1	-0.375	-0.75	-0.25	1
x1	30	1	0	0	1	-2	0	8
x2	24	0	1	0	-0.5	3	1	12
	Z	0	0	0	18	12	-3	528

Como en la última fila aparecen valores negativos, la solución no es óptima. Por tanto, debemos iterar: Entra x_6 y sale x_2.

	Cb	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	B
x3	0	0	0.25	1	-0.5	0	0	4
x1	30	1	0	0	1	-2	0	8
x6	27	0	1	0	-0.5	3	1	12
	Z	0	0	0	18	12	0	$\boxed{564}$

Como ya no hay valores negativos en la última fila, hemos conseguido la solución óptima:

$$\boxed{Z = 564;\ x_1 = 8,\ x_2 = 0,\ x_6 = 12}$$

8 Ejercicio 8

8.1 Problema 1

Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar} Z = 4x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2 \\
&5x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 3 \\
&x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -4 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Después calcule la solución óptima si cambiamos la función objetivo por $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$.

8.2 Problema 2

Resuelva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar} Z = 4x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2 \\
&5x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 3 \\
&x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -4 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Después calcule la solución óptima si añadimos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
R0 :&\ \ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 9 \\
R1 :&\ \ 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 \leq 2
\end{aligned}$$