Investigación Operativa

Ejercicios del tema 4

Sergio García Mondaray
04621336-S

Escuela Superior de Informática de Ciudad Real
Universidad de Castilla-La Mancha

Índice general

1 Resumen de la teoría

Comenzaremos explicando lo que es el algoritmo dual del simplex, que será utilizado para resolver problemas irresolubles y permite facilitar los cálculos con las variables artificiales.

El algoritmo dual del simplex es utilizado cuando:

- Alguna componente de la solución es menor que cero.
- Alguna componente de la solución es menor que cero. Para todas las variables no básicas el último renglón son mayores o iguales que cero.

También es útil cuando la introducción de variables artificiales complica demasiado el problema.

La condición de parada será la misma que para el algoritmo del simplex, esto es cuando todos los valores del último renglón sean positivos y además cuando los valores positivos de la solución han desaparecido.

- Si en el último renglón tiene valores negativos la solución no es óptima.
- Si la solución tiene valores negativos el problema no tiene solución.
- Si la solución no tiene valores negativos para obtener la solución óptima se utilizará el método clásico del simplex.

Si además de tener una componente negativa tenemos que los elementos de su fila asociada no son también negativos tenemos que no hay solución al problema.

Este algoritmo es muy parecido al del simplex con la siguientes diferencias:

- La variable básica que sale es la que posee un valor negativo más alto.
- En este caso la prueba para encontrar la variable que entra es la siguiente:

Aquí acabo el primer día, realizando además algunos ejemplos.

Durante la siguiente clase se abordó uno de los apartados de la teoría de la dualidad, como es la obtención del problema dual. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

- Cada restricción del problema primal tiene asociada una variable del problema dual.
- Los coeficientes de la función objetivo del problema primal son los términos independientes de las restricciones del problema dual.
- Los coeficientes de la función objetivo el dual son los términos independientes de las restricciones del primal
- La matriz de restricciones del problema dual es la traspuesta de la matriz de restricciones del problema primal;
- El problema primal es de maximización y el dual de minimización.

Para hallar la correspondencia entre ambos problemas se suele utilizar la tabla primal- dual o de Tucker.

En ella se puede observar el problema primal por filas, es decir verticalmente. Por columnas, es decir horizontalmente, se observa el problema dual

También este segundo día se propuso una forma de obtener el problema dual, a partir de otro en la que el algoritmo resulta ser el mismo pero es más intuitivo, el caso es que se pueden expresar los lados izquierdos de las restricciones en una matriz, y para pasarlo al dual, simplemente la cambiamos a la transpuesta, el resto tiene una complejidad equivalente al método explicado antes.

Para terminar el tema vimos las propiedades del algoritmo del simplex y algunos ejemplos.

Las propiedades son las siguientes:

- Propiedad de la dualidad débil.
  - Cualquier solución factible en el primal tiene un valor menor o igual que una solución factible en el dual.
  - Matemáticamente: $c_X \leq Y_b$
  - Siempre se cumple porque el valor máximo factible de Z es igual al valor mínimo factible de Z'.
- Propiedad de la dualidad fuerte: Si X e Y son respectivamente soluciones factibles del problema primal y del dual y se cumple que $c_X = Y_b$ entonces X e Y son soluciones a ambos problemas.
- Propiedad de las soluciones complementarias:
  - En cada iteración, el simplex determina una solución FEV X del primal, y una solución complementaria Y del dual.
  - En cada paso se obtienen variables básicas para el primal, y los valores de las variables de holgura son las soluciones del dual complementarias óptimas.
  - Éstas se forman con los elementos correspondientes situados en la última fila y en las columnas que están asociadas a las variables de holgura.
  - Cuando se está resolviendo el problema primal, el problema dual es no factible. Sólo se vuele factible cuando se halla la solución óptima.
- Propiedad de las soluciones complementarias óptimas: En la tabla simplex final, se obtiene la solución óptima x^* del primal, y se obtiene la solución óptima complementaria y^* del dual, y en este punto ambas son factibles. Los valores de y_{i*} se denominan precios sombra para el problema primal.
- Propiedad de la simetría: Para cualquier problema, el dual del dual es el primal.

Las relaciones entre el primal y el dual se pueden establecer en tres puntos:

- Si un problema tiene soluciones factibles y función. objetivo acotada, entonces el otro también, y los valores de la función objetivo en el óptimo son iguales.
- Si uno de los problemas tiene soluciones factibles y función objetivo no acotada, entonces el otro es no factible.

- Si un problema no tiene soluciones factibles, entonces el otro no tiene soluciones factibles o tiene la función objetivo no acotada.

También se vio el teorema de existencia que dice lo siguiente:

Dados un par de problemas duales, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- Ninguno de los dos problemas posee soluciones factibles.
- Uno de los problemas no tiene solución factible y el otro sí, pero no posee solución óptima.
- Los dos problemas poseen solución óptima.

Entre dos problemas duales únicamente pueden darse estas posibilidades:

- Ninguno de los dos problemas posee soluciones factibles
- Uno de los dos problemas no tiene solución factible y el otro sí, pero no posee solución óptima
- Los dos problemas poseen solución óptima

Viendo el teorema podemos llegar a las siguientes situaciones:

- Ambos poseen soluciones factibles, entonces los valores de las funciones objetivo Z y Z' son 2 conjuntos de números. El punto P la solución simultánea de los problemas dual y primal
- La función Z no alcanza un máximo, por lo tanto no existe una solución óptima para el problema dual (no hay punto P).
- La función objetivo dual Y no está acotada inferiormente y por esto no hay punto P. El problema primal no tendrá solución óptima.
- No hay conjunto de soluciones factibles para Z ni para Y, entonces ninguno de esos dos problemas tiene soluciones factibles

Podemos establecer dos reglas prácticas:

- Todo problema de programación lineal puede resolverse aplicando el algoritmo del simplex a su problema dual asociado.
- Los lemas de la dualidad son claves en la resolución de algunos problemas (Ej. Si X e Y son soluciones de un problema dual y primal correspondiente y $c_X = Y_b$, X e Y serán óptimos).

2 Ejercicio 2

2.1 Enunciado

Utilice el Algoritmo Dual del Simplex para resolver:

Minimizar $Z = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4$

sujeto a: $6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = -5$

$-x_2 + 6x_3 \leq -7$

$-4x_1 + 2x_3 \geq 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

2.2 Solución

Lo pasamos a su forma estandar.

Maximizar $Z = -6x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

$-6x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = 5$

$-x_2 + 6x_3 + x_6 = -7$

$-4x_1 + 2x_3 - x_7 + x_8 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Aplicamos el dual del simplex.

C^B	X^B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	B
0	x_5	-6	5	-4	-1	1	0	0	5
0	x_6	0	-1	6	0	0	1	0	-7
0	x_7	4	0	-2	0	0	0	1	-3
	$Z - C_i$	6	7	4	5	0	0	0	

Sale x_6 y entra x_2

C^B	X^B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	B
0	x_5	-6	0	26	-1	1	5	0	-30
-7	x_2	0	1	-6	0	0	-1	0	7
0	x_7	4	0	-2	0	0	0	1	-3
	$Z - C_i$	6	0	46	5	0	7	0	

Sale x_5 y entra x_4

C^B	X^B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	B
-5	x_4	6	0	-26	1	-1	-5	0	30
-7	x_2	0	1	-6	0	0	-1	0	7
0	x_7	4	0	-2	0	0	0	1	-3
	$Z - C_i$	-24	0	176	0	5	32	0	

Sale x_7 y entra x_3

C^B	X^B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	B
-5	x_4	-46	0	0	1	-1	-5	-13	69
-7	x_2	-12	1	0	0	0	-1	-3	16
-4	x_3	-2	0	1	0	0	0	-1/2	3/2
	$Z - C_i$	328	0	0	0	5	32	88	

La solución es:

$$\boxed{\text{x}_4 = 69;\ x_2 = 16;\ x_3 = 3/2;\ Z = 463}$$

3 Ejercicio 3

3.1 Enunciado

Se considera el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } Z = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resuelva el problema utilizando el algoritmo del Simplex.

b) Obtenga el problema dual asociado.

c) Resuelva el problema dual.

d) Razone sobre los resultados obtenidos.

3.2 Solución

a) Resuelva el problema utilizando el algoritmo del Simplex.

Para emplear el algoritmo del Simplex, tendremos que transformar el problema a una maximización:

$$\text{Maximizar } Z = -9x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el problema de maximización, la última tabla del Simplex es la siguiente:

C^B	X^B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	B
-4	x_3	0.5	0	1	-0.5	-0.5	0	0.5
0	x_6	1.5	0	0	-0.5	1.5	1	1.5
-2	x_2	1.5	1	0	-0.5	0.5	0	1.5
	Z - C_i	4	0	0	3	1	0	-5

De donde podemos apreciar que la solución del problema de minimización es:

$$\boxed{\text{Z = 5; x}_1 = 0,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 0.5}$$

b) Obtenga el problema dual asociado.

En primer lugar expresamos el problema primal de tal forma que todas las restricciones sean de menor o igual:

$$\text{Maximizar } Z = -9x_1 - 2x_2 - 4x_3$$
$$\begin{aligned} &-2x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ &-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener el problema dual asociado:

$$\text{Minimizar } Z' = -2y_1 + y_2 - y_3$$
$$\begin{aligned} &-2y_1 + y_2 - y_3 \geq -9 \\ &-y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ &-y_1 - y_2 + y_3 \geq -4 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Que, en forma aumentada es:

$$\text{Maximizar } Z' = 2y_1 - y_2 + y_3$$
$$\begin{aligned} &2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 9 \\ &y_1 - y_2 + 2y_3 + y_5 = 2 \\ &y_1 + y_2 - y_3 + y_6 = 4 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c) Resuelva el problema dual.

Mediante el algoritmo del Simplex, resolvemos el planteamiento dual anterior, y obtenemos la última tabla siguiente:

-	-	2	-1	1	0	0	0	-
C	X	y1	y2	y3	y4	y5	y6	B
0	y4	0	0	-1.5	1	-1.5	-0.5	4
2	y1	1	0	0.5	0	0.5	0.5	3
-1	y2	0	1	-1.5	0	-0.5	0.5	1
-	Z-Ci	0	0	1.5	0	1.5	0.5	5

De donde concluimos, que la solución a este problema, es la siguiente:

$$\boxed{Z = -5;\ x_1 = 0.5;\ x_2 = 0.5;\ x_3 = 0}$$

d) Razone sobre los resultados obtenidos.

Podemos observar, tal y como corresponde con la teoría, que en la última fila del problema dual aparece el valor de las variables de la solución del primal, y viceversa.

4 Ejercicio 4

4.1 Enunciado

Se considera el siguiente problema de Programación Lineal:

$$Minimizar Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 20$$
$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 5$$
$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Resuelva el Problema utilizando el Algoritmo del Simplex.
- Obtenga el Problema Dual Asociado.
- Resuelva el Problema Dual.
- Razone sobre los resultados obtenidos.

4.2 Solución

a)

El apartado a, pide resolver el problema mediante el algoritmo del simplex, para ello aplicando las posibles herramientas a nuestra disposición, como puede ser la que implementamos para las prácticas de la asignatura obtenemos que la tabla solución es:

C^b	x^b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
-4	x_4	0	-5	-8	1	0	0	-2	-1	10
0	x_5	0	-14	-23	0	1	0	-5	-3	15
0	x_6	0	-20	-37	0	0	1	-8	0-5	20
-3	x_1	1	-8	-14	0	0	0	-3	-2	15
	$Z - C_i$	0	45	79	0	0	0	17	10	85

Vemos que la solución óptima obtenida es:

$$\boxed{\text{Z=85; x}_1 = 15;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 10}$$

b)

El apartado b pide obtener el problema dual correspondiente, así el modelo obtenido es el siguiente:

$Maximizar(Z) = 10x_1 + 20x_2 + 5x_3$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 1x_4 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 4$$

Para llegar a obtener el modelo, lo único que debemos tener en cuenta es que los signos de todas las restricciones deben ser iguales, es decir que sea $\leq$, $\geq$ o =.

Así pues nos hemos dado cuenta que en el modelo que se nos proporciona en el enunciado tenemos todos los signos de las restricciones iguales ($\geq$), menos el de la penúltima restricción, por tanto deberemos cambiarlo y para ello multiplicaremos por -1 toda la inecuación quedando esta de la siguiente manera:

$$2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 \geq 0$$

Una vez tenemos todos los signos iguales procedemos a aplicar el algoritmo para obtener el modelo en forma dual.

c)

El apartado c, pide resolver el problema dual, es decir, resolver el problema mediante el método del simplex con el modelo en forma dual (el modelo calculado en el apartado b).

Pasamos el modelo a forma estándar:

$Maximizar(Z) = 10x_1 + 20x_2 + 5x_3$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 1x_4 + x_6 = 1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_7 = 5$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_8 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Mediante el algoritmo del simplex, la última tabla a la que llegamos es la siguiente:

C^b	x^b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
0	x_4	3	5	0	1	2	0	0	1	10
0	x_6	14	20	0	0	8	1	0	5	45
0	x_7	23	37	0	0	14	0	1	8	79
5	x_3	5	8	1	0	3	0	0	2	17
	$Z - C_i$	15	20	0	0	15	0	0	10	85

Vemos que la solución óptima es:

$$\boxed{\text{Z=85; x}_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 17;\ x_4 = 10}$$

d)

El apartado d pide razonar las similitudes entre ambos, pues bien podemos decir que las soluciones como dice el teorema visto en teoría, tenemos que las soluciones son complementarias esto lo podemos observar viendo ambas soluciones y comparándolas:

La solución en el primal es: (15,0,0,10,0,0,17,10)

La solución del dual es: (0,0,17,10,15,0,0,10)

Tal y como hemos visto en teoría, una solución es la permutación filas-columnas de la otra.

5 Ejercicio 5

5.1 Enuciado

Minimizar $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

$-3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 2$

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- Resuelva el Problema utilizando el Algoritmo del Simplex
- Resuelva el Problema utilizando el Algoritmo Dual del Simplex
- Obtenga el Problema Dual Asociado.
- Resuelva el Problema Dual.
- Razone los resultados obtenidos.

5.2 Resolución

a)

La solución del simplex es:

C^B	X^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Operación
0	x_4	0	-1	-3	1	-3	5	
-2	x_1	1	-2	-3	0	-1	-1	
-	Z - C_i	0	5	9	0	2	-2	-

Solución: $x_1 = 1$ y $z = 2$.

b)

Aplicamos el dual del simplex:

C^B	X^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Operación
0	x_4	-3	5	6	1	0	2	
0	x_5	-1	2	3	0	1	-1	
-	Z - C_i	2	1	3	0	0		-

Sale x_5 y entra x_6

C^B	X^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Operación
0	x_4	0	-1	-3	1	1	5	
-2	x_1	1	-2	-3	0	-1	1	
-	Z - C_i	0	5	9	0	2	2	-

Solución:

$$\boxed{x_1 = 1;\ Z = 2}$$

.

c)

Empezamos planteando el problema primal, despues pasamos al dual y éste a su forma estandar.

El **Problema primal** es

$$\text{Maximizar } Z = -2x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$-3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 2$$
$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El **Problema Dual** es

$$\text{Minimizar } Z = 2y_1 - y_2$$
$$-3y_1 - y_2 \geq -2$$
$$5y_1 + 2y_2 \geq -1$$
$$6y_1 + 3y_2 \geq -3$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Lo pasamos a su forma estándar y sale:

$$\text{Maximizar } Z = -2y_1 + y_2$$
$$3y_1 + y_2 + y_3 = 2$$
$$-5y_1 - 2y_2 + y_4 = 1$$
$$-6y_1 - 3y_2 + y_5 = 3$$

Ahora lo resolvemos el dual por simplex:

C^B	X^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Operación
1	x_2	3	1	1	0	0	2	
0	x_4	1	0	2	1	0	5	
0	x_5	3	0	3	0	1	9	
-	Z - C_i	5	0	1	0	0	2	-

La solución es

$$\boxed{Z=2;\ x_1 = 0;\ x_2 = 2}$$

6 Ejercicio 6

6.1 Enunciado

Una compañía fabrica dos tipos de barcos: catamarán y monocasco. La fabricación de los barcos se realiza en las secciones de moldeado, pintura y montaje. La fabricación de cada catamarán requiere 2 horas de moldeado, 3 de pintura y una de montaje. La fabricación de un monocasco requiere tres horas de moldeado, 2 de pintura y una de montaje. Las secciones de moldeado y pintura disponen, cada una, de un máximo de 1.500 horas cada mes, y la de montaje de 600. Un catamarán se vende a 60.000 euros y un monocasco a 72.000 euros.

a) Obtenga la solución que maximiza el beneficio.

b) Resuelva el problema Dual.

c) Determine los precios de sombra de las capacidades de los recursos y control.
Exponga las conclusiones al respecto.

6.2 Solución

En primer lugar vamos a plantear el problema formalmente –las unidades de la función objetivo son miles de euros–:

$$\text{Maximizar } Z = 60x_1 + 72x_2$$

$$\begin{aligned}&x_1, x_2 \geq 0\\&2x_1 + 3x_2 \leq 1500\\&3x_1 + 2x_2 \leq 1500\\&x_1 + x_2 \leq 600\end{aligned}$$

a) Resolviendo el problema por el algoritmo del Simplex, la última tabla es la siguiente:

-	-	60	72	0	0	0	-
C^B	X^B	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	B
72	x2	0	1	0.6	-0.4	0	300
60	x1	1	0	-0.4	0.6	0	300
0	x5	0	0	-0.2	-0.2	1	$1.2{\cdot}10^{-11}$
-	Z	0	0	19.2	7.2	0	39600

De donde podemos obtener la solución óptima:

$$\boxed{Z = 39600;\ x_1 = 300,\ x_2 = 300}$$

b) Ahora resolvamos el problema dual asociado:

En primer lugar, obtenemos el planteamiento del problema dual asociado al problema anterior:

$$\text{Minimizar } Z = 1500y_1 + 1500y_2 + 600y_3$$

$$\begin{aligned}&2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 60\\&3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 72\\&y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{aligned}$$

Que, en forma estándar, queda:

$$\text{Maximizar } Z = -1500y_1 - 1500y_2 - 600y_3$$

$$\begin{aligned}&-2y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 = -60\\&-3y_1 - 2y_2 - y_3 + y_5 = -72\\&y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{aligned}$$

Resolviendo por el algoritmo del Simplex, la última tabla es la siguiente:

C^B	X^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	B
-1500	y_2	0	1	0.2	-0.6	0.4	7.2
-1500	y_1	1	0	0.2	0.4	-0.6	19.2
-	Z	0	0	3.6	300	300	-39600

De donde concluimos la solución del problema dual:

$$\boxed{Z = 39600;\ x_1 = 19.2;\ x_2 = 7.2;\ x_3 = 0}$$

c) Podemos observar cómo en la última fila de la resolución del problema Dual aparece la solución del problema primal (y viceversa), tal y como hemos visto en la teoría.

7 Ejercicio 7

7.1 Enunciado

Una compañía juguetera fabrica trenes, camiones y coches, con tres operaciones. Los límites diarios de tiempo disponible para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los beneficios por tren, camión y coche son 3 euros, 2 euros y 5 euros, respectivamente. Los tiempos de cada operación por tren son 1, 3 y 1 minuto, por camión 2, 0 y 4, y por coche son 1, 2 y 0, todos ellos en minutos (un tiempo cero indica que no es necesaria esa operación).

1. Obtenga la solución que maximiza el beneficio.
2. Resuelva el problema Dual.
3. Determine los precios de sombra de las capacidades de los recursos y control. Exponga las conclusiones al respecto.

7.2 Solución

a)

Como siempre en los problemas de optimización lo primero que debemos realizar es el modelo de nuestro problema, esto es:

Variables a utilizar:

x_1 = Número de trenes que hay que fabricar.

x_2 = Número de camiones que hay que fabricar.

x_3 = Número de coches que hay que fabricar.

Función objetivo:

$$Maximizar(Z) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pasamos el modelo a forma estándar:

$$Maximizar(Z) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 430$$
$$3x_1 + 2x_3 + x_5 = 460$$
$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 420$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Obtenemos la tabla solución empleando algunas de las herramientas disponibles.

C_i	x^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	x_6	B
2	x_2	-0.25	1	0	0.5	-0.25	0	100
5	x_3	1.5	0	1	0	0.5	0	230
0	x_6	2	0	0	-2	1	1	20
	$Z - C_i$	4	0	0	1	2	0	1350

Podemos ver que la solución óptima es la siguiente:

$$\boxed{\text{Z = 1350; x}_1 = 0;\ x_2 = 100;\ x_3 = 230}$$

b)

Este apartado pide resolver el problema dual, para ello tendremos que cambiar nuestro modelo primal (el del apartado anterior), al modelo dual, este es:

Función objetivo:

$$Minimizar(Z) = 430x_1 + 460x_2 + 420x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$
$$2x_1 + 4x_3 \geq 2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pasamos el problema a forma estándar:

$$Maximizar(Z) = -430x_1 - 460x_2 - 420x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3$$
$$2x_1 + 4x_3 - x_6 + x_7 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_8 + x_9 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Vemos que no tenemos coeficientes de solución negativos por lo tanto podemos aplicar el algoritmo del simplex, y no es necesario que apliquemos el algoritmo del dual, por tanto podemos utilizar alguna de las herramientas que nos facilitarán la tarea de la consecución de la tabla de solución óptima.

C_i	x^B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	x_6	B
-460	x_2	0	1	-1	0	0.25	-0.5	2
-430	x_1	1	0	2	0	-0.5	0	1
0	x_4	0	0	-2	1	0.25	-1.5	4
	$Z - C_i$	0	0	20	0	100	230	-1350

Vemos que la solución óptima es:

$$\boxed{\text{Z=1350; x}_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 0}$$

c)

El apartado c pide que digamos cuales son los precios sombra de las capacidades de los recursos y control para ello nos fijamos en la solución obtenida a partir del problema dual, y vemos que:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0$$

Sabiendo que un precio de sombra se define como la contribución a la ganancia por cada unidad del producto, y deben ser positivos, ya que si fueran negativos sería mejor no utilizar el recurso, en general diremos que el precio sombra de una restricción proporciona el cambio en el valor de la función objetivo como resultado de un cambio unitario en el término independiente de la restricción, suponiendo que el resto de parámetros del problema permanecen inalterados.

Así pues concluimos diciendo que los precios de sombra son:

$$\boxed{\text{x}_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 0}$$

Que coinciden con las soluciones del problema dual.