
Investitación Operativa
Problemas del tema 5

Sergio García Mondaray
04621336-S



Escuela Superior de Informática de Ciudad Real
Universidad de Castilla-La Mancha

1 Ejercicio 1

El método del transporte es una técnica creada para minimizar los costes asociados a la distribución de un producto, satisfaciendo la demanda dependiendo de la oferta.

- Las características principales de este método son:
- Coeficientes de las variables de las restricciones = 0 o 1.
- Oferta = Demanda.
- Producto homogéneo.
- Variables de decisión ≥ 0 .

En estos problemas disponemos de:

- Función objetivo: representa los costes del transporte de todos los materiales.

$$\text{Min } (Z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

- Restricciones de la oferta:

$$\text{(Oferta)} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$$

- Restricciones de demanda:

$$\text{(Demanda)} \sum_{j=1}^m x_{ij} \geq b_j$$

En el caso en que la demanda supere la oferta o viceversa, es necesario balancear aquel que sea mayor, es decir, añadir un origen o un destino ficticio el cual absorba la oferta sobrante o ofrezca la oferta necesaria.

Para resolver problemas mediante este método, se han de seguir los siguientes pasos:

- Obtener una solución inicial.
- Comprobar la optimalidad de la solución.
- Iterar en caso de que no sea óptima.

Para obtener las soluciones iniciales existen 3 métodos:

- Método de la Esquina noroeste:

Consiste en ir rellenando a partir de la esquina superior izquierda con el máximo que podamos ir dándole.

- Método de Vogel:

Se da el máximo posible a la casilla en la que la diferencia en la fila o en la columna entre el menor costo y el que le sigue en incremental sea mayor.

- Método del coste unitario mínimo:

Se da el máximo posible a la casilla cuyo coste sea menor.

Para la resolución del problema existen 2 métodos:

- Stepping Stone.
- Método de los multiplicadores.

2 Ejercicio 2

Enunciado

	V1	V2	V3
	40	60	30
A 45	8	9	6
B 25	5	7	4
C 50	3	5	7
D 30	7	8	5

Determine la solución inicial básica factible y su coste asociado por cada uno de los métodos estudiados en clase. Comente la calidad relativa de las soluciones obtenidas.

Solución

En primer lugar comprobamos si el problema está balanceado:

$$40 + 60 + 30 = 130 ; 45 + 25 + 50 + 30 = 150$$

luego el problema no está balanceado, así que añadimos un destino ficticio. La tabla queda de la siguiente forma:

	V1	V2	V3	V4
	40	60	30	20
A 45	8	9	6	0
B 25	5	7	4	0
C 50	3	5	7	0
D 30	7	8	5	0

Ahora aplicamos cada uno de los métodos:

Esquina noroeste

Comenzamos a asignar el máximo posible (mínimo valor entre recursos disponibles y necesidad) a la celda noroeste, es decir, la de x_{11} .

A partir de ahí vamos repartiendo los recursos por el resto de celdas. La tabla queda:

	V1	V2	V3	V4
	40 0	60 55 30	30 10 0	20 0
A 45 5	8 40	9 5	6 0	0
B 25 0	5	7 25	4	0
C 50 20 0	3	5 30	7 20	0
D 30 20 0	7	8	5 10	0 20

La solución obtenida, por tanto, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 40, & x_{12} &= 5, & x_{22} &= 25 \\
 x_{32} &= 30, & x_{33} &= 20, & x_{43} &= 10 \\
 x_{44} &= 20
 \end{aligned}$$

cuyo coste asociado es:

$$8 * 40 + 9 * 5 + 7 * 25 + 5 * 30 + 7 * 20 + 5 * 10 + 0 * 20 = \boxed{880}$$

Vogel

Se añaden una fila y una columna con el valor absoluto de la diferencia entre las dos celdas de menor coste, para cada fila y columna. Después se coge la fila o columna donde la diferencia sea mayor, y de esa fila o columna, a la celda de menor valor se le asigna lo máximo posible. Después se actualizan los recursos, necesidades y diferencias y se vuelve a iterar.

	V1	V2	V3	V4	Diff
	40	60	30	20 0	It.1
A 45 25	8	9	6	0 20	⑥
B 25	5	7	4	0	4
C 50	3	5	7	0	3
D 30	7	8	5	0	5
Diff It.1	5-3=2	7-5=2	5-4=1	0-0=0	

Ahora podemos despreciar la columna V4, puesto que su necesidad está cubierta, y seguir iterando:

	V1	V2	V3	V4	Diff
	40	60	30 0	20 0	It.1
A 45 25	8	9	6	0 20	8-6=2
B 25	5	7	4	0	5-4=1
C 50	3	5	7	0	5-3=2
D 30 0	7	8	5 30	0	7-5=②
Diff It.1	5-3=2	7-5=2	5-4=1	-	

Ahora podemos ignorar también la columna V3 y la fila D:

	V1	V2	V3	V4	Diff
	40	60 10	30 0	20 0	It.1
A 45 25	8	9	6	0 20	9-8=1
B 25	5	7	4	0	7-5=2
C 50 0	3	5 50	7	0	5-3=2
D 30 0	7	8	5 30	0	-
Diff It.1	5-3=2	7-5=②	-	-	

Ahora ignoramos la fila C, puesto que es un recurso agotado:

	V1 40 15	V2 60 10	V3 30 0	V4 20 0	Diff It.1
A 45 25	8	9	6	0 20	9-8=1
B 25 0	5 25	7	4	0	7-5=2
C 50 0	3	5 50	7	0	-
D 30 0	7	8	5 30	0	-
Diff It.1	8-5=③	9-7=2	-	-	

Por último, ya sólo tenemos las celdas 11 y 12:

	V1 40 15	V2 60 10	V3 30 0	V4 20 0	Diff It.1
A 45 25 15	8	9 10	6	0 20	9-8=1
B 25 0	5 25	7	4	0	-
C 50 0	3	5 50	7	0	-
D 30 0	7	8	5 30	0	-
Diff It.1	8	⑨	-	-	

Y, por último, la celda 11:

	V1 40 15 0	V2 60 10	V3 30 0	V4 20 0	Diff It.1
A 45 25 15 0	8 15	9 10	6	0 20	⑧
B 25 0	5 25	7	4	0	-
C 50 0	3	5 50	7	0	-
D 30 0	7	8	5 30	0	-
Diff It.1	8	-	-	-	

Por lo tanto, la solución encontrada es la siguiente:

$$x_{11} = 15, x_{12} = 10$$

$$x_{21} = 25, x_{14} = 20$$

$$x_{32} = 50, x_{43} = 30$$

cuyo coste es el siguiente:

$$8 * 15 + 9 * 10 + 5 * 25 + 5 * 50 + 5 * 30 = \boxed{735}$$

Coste mínimo

En cada iteración seleccionamos la celda de menor coste, y le asignamos lo máximo posible (es decir, el mínimo entre la disponibilidad de ese recurso y la necesidad del mismo). La tabla es la siguiente:

	V1	V2	V3	V4
	40 30	60 40	30 50	20 0
A	8	9	6	0
45 25			25	20
B	5	7	4	0
25 20		20	5	
C	3	5	7	0
50 10	10	40		
D	7	8	5	0
30	30			

La solución obtenida es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_{13} &= 25, & x_{14} &= 20 \\ x_{22} &= 20, & x_{23} &= 5 \\ x_{31} &= 10, & x_{32} &= 40 \\ x_{41} &= 30 \end{aligned}$$

y el coste asociado a la misma es:

$$6 * 25 + 7 * 20 + 4 * 5 + 3 * 10 + 4 * 50 + 7 * 30 = \boxed{750}$$

Conclusiones

Como podemos observar, el método de Vogel ofrece una solución factible de mejor calidad que los otros dos métodos, puesto que el coste de la misma es menor, concretamente de 735, frente a los 880 de la esquina noroeste y los 750 del método del coste mínimo.

3 Ejercicio 3

3.1 Enunciado

Dada la tabla:

		1	2	3
		8	3	9
A	8	4	3	5
B	5	2	3	6
C	6	3	1	2

Determine la solución óptima a partir de la solución inicial obtenida por cada uno de los métodos estudiados.

3.2 Resolución

Primero se balancea el problema. Para ello añadimos una fila ficticia.

Esquina Noroeste

		1	2	3
		8-8=0	3	9
A	8-8=0	8		
		4	3	5
B	5			
		2	3	6
C	6			
		3	1	2
F	1			
		0	0	0

		1	2	3
		8-8=0	3-3=0	9
A	8-8=0	8		
		4	3	5
B	5-3=2		3	
		2	3	6
C	6			
		3	1	2
F	1			
		0	0	0

		1	2	3
		8-8=0	3-3=0	9-2=7
A	8-8=0	8		
		4	3	5
B	2-2=0		3	2
		2	3	6
C	6			
		3	1	2
F	1			
		0	0	0

		1 8-8=0	2 3-3=0	3 7-6=1		
A	8-8=0	8 4	3 3	5 5		
B	2-2=0	2	3 3	2 6		
C	6-6=0	3	1	6 2		
F	1	0	0	0		

		1 8-8=0	2 3-3=0	3 1-1=0		
A	8-8=0	8 4	3 3	5 5		
B	2-2=0	2	3 3	2 6		
C	6-6=0	3	1	6 2		
F	1-1=0	0	0	1 0		

El coste sería: $4 * 8 + 3 * 3 + 6 * 2 + 2 * 6 + 1 * 0 = 65$

Voguel

		1 8	2 3	3 9-1=8		
A	8	4	3	5	4-3=1	
B	5	2	3	6	3-2=1	
C	6	3	1	2	2-1=1	
F	1-1=0	0	0	0	0	
		2-0	1-0=1	2-0=2		

		1 8	2 3	3 8-6=2	
A	8	4	3	5	4-3=1
B	5	2	3	6	3-2=1
C	6-6=0	3	1	2	2-1=1
F	1-1=0	0	0	0	0
		3-2=1	3-1=2	5-2=3	

		1 0	2 0	3 0	
A	0	3	3	2	4-3=1
B	0	5	3	6	3-2=1
C	6-6=0	3	1	2	2-1=1
F	1-1=0	0	0	0	0
-	-	-	-	-	

El coste es: $4 * 3 + 3 * 3 + 5 * 2 + 5 * 2 + 2 * 6 = 53$

Coste Mínimo

		1 8-1=7	2 3	3 9	
A	8	4	3	5	
B	5	2	3	6	
C	6	3	1	2	
F	1-1=0	1	0	0	

		1 8-1=7	2 3-3=0	3 9
A	8	4	3	5
B	5	2	3	6
C	6-3=3	3	1	2
F	1-1=0	1 0	0	0

		1 8-1=7	2 3-3=0	3 9-3=6
A	8	4	3	5
B	5	2	3	6
C	3-3=0	3	1	2
F	1-1=0	1 0	0	0

		1 7-5=2	2 3-3=0	3 9-3=6
A	8	4	3	5
B	5-5=0	5	3	6
C	3-3=0	3	1	2
F	1-1=0	1 0	0	0

		1 7-5=2	2 3-3=0	3 9-3=6
A	8-2=6	2	3	5
B	5-5=0	5	3	6
C	3-3=0	3	1	2
F	1-1=0	1 0	0	0

		1	2	3		
		7-5=2	3-3=0	6-6=0		
A	6-6=0	2 / 4	/ 3	6 / 5		
B	5-5=0	5 / 2	/ 3	/ 6		
C	3-3=0	/ 3	3 / 1	3 / 2		
F	1-1=0	1 / 0	/ 0	/ 0		

El coste es: $4 * 2 + 2 * 5 + 0 * 1 + 1 * 3 + 5 * 6 + 2 * 3 = 57$

Coste óptimo

		1	2	3		
		0	0	0		
A	0	3 / 4	3 / 3	2 / 5	4-3=1	
B	0	5 / 2	/ 3	/ 6	3-2=1	
C	6-6=0	/ 3	/ 1	6 / 2	2-1=1	
F	1-1=0	/ 0	/ 0	1 / 0	0	
-	-	-	-	-		

Ahora se aplica el método de los multiplicadores al menor coste que hemos obtenido, que ha sido el realizado por el método de Vogel.

$$U_1 + V_1 = 4$$

$$U_1 + V_2 = 3$$

$$U_1 + V_3 = 5$$

$$U_2 + V_1 = 2$$

$$U_3 + V_3 = 2$$

$$U_4 + V_3 = 0$$

$$U_1 = 0, U_2 = -2, U_3 = -3, U_4 = -5, V_1 = 4, V_2 = 3, V_3 = 5$$

Las variables no básicas son: $x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42}$

$$x_{22} = U_2 + V_2 - C_{22} = -2$$

$$x_{23} = U_2 + V_3 - C_{23} = -3$$

$$x_{31} = U_3 + V_1 - C_{31} = -2$$

$$x_{32} = U_3 + V_2 - C_{32} = -1$$

$$x_{41} = U_4 + V_1 - C_{41} = -1$$

$$x_{42} = U_4 + V_2 - C_{42} = -3$$

La solución es óptima.

4 Ejercicio 4

4.1 Enunciado

Un ordenador dispone de tres discos de diferentes características A, B, C. Puede almacenar como máximo 200 archivos en A, 100 en B y 300 en C. El usuario desea almacenar 300 archivos de texto, 100 paquetes conteniendo programas y 100 archivos de datos. Cada día accede en promedio 8 veces a un archivo de texto, 4 veces a un programa y 2 veces a un archivo de datos. Las unidades de tiempo utilizadas en acceder a un archivo, según el tipo de archivo y el lugar en el que esté almacenado, viene dado en la siguiente tabla:

	Texto	Programas	Datos
A	5	4	4
B	2	1	1
C	10	8	6

Resuelva el problema que nos indica en qué discos se deben almacenar los archivos para minimizar el tiempo total de acceso.

Oferta	Demanda	Texto	Programas	Datos	
		300	100		100
A	200	5	4		4
B	100	2	1		1
C	300	10	8		6

4.2 Solución

Vamos a resolver el problema por el método del coste mínimo unitario. La tabla inicial que plantearemos es:

Lo primero que deberemos hacer para poder abordar el problema es balancear la tabla, quedando así:

Oferta	Demanda	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
		300	100	100	600-500=100
A	200	5	4	4	0
B	100	2	1	1	0
C	300	10	8	6	0

Las siguientes tablas, recordemos que estamos utilizando el método del coste mínimo son las siguientes:

Oferta	Demanda	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
		300	100	100	
A	200	5	4	4	0
B	100	2	1	1	0
C	200	10	8	6	0
					100

Estas tablas han sido construidas siguiendo los siguientes pasos:

- Seleccionamos el menor coste de los restantes.
- Asignamos el mínimo entre los recursos disponibles y los demandados.
- Actualizamos la tabla y la fila o columna que quede con 0, prescindimos de ella.
- Repetiremos estos pasos hasta que se satisfagan las condiciones de demanda.

Viendo la última tabla tenemos que el coste es el que sigue:

$$Coste = 5 * 100 + 10 * 200 + 4 * 100 + 100 + 0 * 100$$

Veamos ahora si la solución es óptima, para ello construimos el sistema:

Oferta	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
	Demanda	300	100	
A	200	5	4	4
B		2	1	1
				100
C	200	10	8	6
				100

Oferta	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
	Demanda	300		
A	100	5	4	4
				100
B		2	1	1
				100
C	200	10	8	6
				100

- $A + T = 5$
- $A + P = 4$
- $B + D = 1$
- $C + T = 10$
- $C + PC = 0$
- Tomando $A = 0$, entonces quedan las siguientes soluciones:
- $T=5$
- $P=4$
- $C=5$
- $PC=-5$

Vemos que queda una ecuación sin determinar lo que haremos será, creamos una nueva ecuación, lo podemos hacer porque tenemos $m+n-2$ ecuaciones y nos hacen falta $m+n-1$, la ecuación será $B+T=2$, es decir una ecuación que nos permita relacionar alguna de las variables despejadas con B o D, la incluiremos en la tabla con coste 0. Despejando tenemos que $B=-3$, y teniendo B, tenemos que $D=4$.

Teniendo las soluciones de este sistema, tenemos que hallar el valor de las variables no básicas:

- $X_{13} = A + D - C_{13} = 0$
- $X_{14} = A + PC - C_{14} = -5$
- $X_{22} = B + P - C_{22} = 0$
- $X_{24} = B + PC - C_{24} = -8$
- $X_{32} = C + P - C_{32} = 1$

Oferta	Demanda	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
	200				
A		5	4	4	0
		100	100		
B		2	1	1	0
				100	
C	200	10	8	6	0
					100

Oferta	Demanda	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
	200				
A		5	4	4	0
		100	100		
B		2	1	1	0
				100	
C		10	8	6	0
	200				100

- $X_{33} = 1$
- $X_{34} = 0$

Vemos que no todos los valores obtenidos son ≥ 0 entonces tenemos que iterar.

Para determinar la variable que entra tenemos que elegir la que tenga el valor más alto, por ejemplo X_{33} .

Observamos si podemos iniciar un ciclo, y lo podemos hacer y quedará indicado de esta manera:

Oferta	Demanda	Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
A		5	4	4	0
		100	100		
B		2	1	1	0
		a		100-a	
C		10	8	6	0
	200-a			a	100

Asignamos el valor a α que tenga el asignado más pequeño (en los que α se encuentra restando), por tanto α pasa a tener el valor 100, y así queda la tabla.

Calculamos ahora la nueva $X_{23} = 0$, por tanto viendo esta ecuación y las que hemos hallado antes, determinamos la siguiente a entrar, que será X_{32} , procedemos de igual manera que antes.

Calculamos las que se han hecho 0 $X_{31} = 0$ y $X_{12} = 0$, de manera que hemos concluido la búsqueda de la solución óptima quedando esta así:

$$Coste = 5 * 200 + 2 * 100 + 8 * 100 + 6 * 100 = 2600$$

El problema además te decía que tenía promedio de acceso a archivos de manera que multiplicamos el promedio respectivo en los diferentes sumandos de la solución, quedando esta así:

$$Coste = 5 * 200 * 8 + 2 * 100 * 4 + 100 * 8 * 4 + 6 * 100 * 2 = 14000$$

Oferta		Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
	Demanda				
A		5	4	4	0
		100	100		
B		2	1	1	0
		100		0	
C		100	8	6	0
		100		100	100

Oferta		Texto	Programas	Datos	Prácticas Concurrente
	Demanda				
A		5	4	4	0
		100+a	100-a		
B		2	1	1	0
		100		0	
C		10	8	6	0
		100-a	a	100	100

La distribución óptima queda de la siguiente manera:

Guardar 200 archivos de texto en A
Guardar 100 archivos de texto en B
Guardar 100 archivos de programas en C
Guardar los 100 de texto restantes en C
Quedando libres 100 huecos en C.

5 Ejercicio 5

Una empresa manufacturera elabora un producto en tres países diferentes P_1 , P_2 y P_3 , que debe ser transportado a tres distribuidores situados en tres ciudades distintas C_1 , C_2 y C_3 para su posterior venta. La cantidad de unidades de producto disponible en P_1 es de 9.000, en P_2 existen 4.000 y en P_3 , 8.000. Las unidades de producto requeridas en C_1 es de 6.000, en C_2 : 5.000 y en C_3 : 7.000. Los costes unitarios de transporte, en unidades monetarias, desde cada país hasta cada una de los distribuidores de las tres ciudades se muestran en la siguiente tabla.

5.1 Resolución

Como la oferta es mayor que la demanda, balanceamos y obtenemos una solución inicial por el método de de la Esquina Noroeste.

<u>Destino</u>	1	2	3	D.Ficticio
Origen	6000	5000	7000	3000
1	10	20	9	0
9000	6000	3000	0	0
2	8	10	6	0
4000	0	2000	2000	0
3	10	30	7	0
8000	0	0	5000	3000

Donde con valor de la función objetivo 187000 obtenemos la siguiente solución inicial:

$$x_{11} = 6000$$

$$x_{12} = 3000$$

$$x_{22} = 2000$$

$$x_{23} = 2000$$

$$x_{34} = 5000$$

$$u_1 + v_1 = 10; u_1 = 0; v_1 = 10;$$

$$u_1 + v_2 = 20; v_2 = 20$$

$$u_2 + v_2 = 10; u_2 = -10;$$

$$u_2 + v_3 = 6; v_3 = 16$$

$$u_3 + v_3 = 7; u_3 = -9$$

$$u_3 + v_4 = 0; v_4 = 9$$

Construimos ecuaciones con la variables no básicas:

$$u_1 + v_3 - c_{13} = 7$$

$$u_1 + v_4 - c_{14} = 9$$

$$u_2 + v_1 - c_{21} = -8$$

$$u_2 + v_4 - c_{24} = -1$$

$$u_3 + v_1 - c_{31} = -9$$

$$u_3 + v_2 - c_{32} = -19$$

Como no todos los valores son ≤ 0 entonces elegimos el mayor y calculamos α :

<u>Destino</u> Origen	1 6000	2 5000	3 7000	D.Ficticio 3000
1 9000	10 6000	20 $3000 - \alpha$	9 0	0 α
2 4000	8 0	10 $2000 + \alpha$	6 $2000 - \alpha$	0 0
3 8000	10 0	30 0	7 $5000 + \alpha$	0 $3000 - \alpha$

$$\alpha = 2000$$

<u>Destino</u> Origen	1 6000	2 5000	3 7000	D.Ficticio 3000
1 9000	10 6000	20 1000	9 0	0 200
2 4000	8 0	10 4000	6 0	0 0
3 8000	10 0	30 0	7 7000	0 1000

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 10; u_1 = 0; v_1 = 10; \\
u_1 + v_2 &= 20; v_2 = 20 \\
u_1 + v_3 &= 0; \\
u_2 + v_2 &= 10; u_2 = -10; \\
u_3 + v_3 &= 7; u_3 = 0; v_3 = 7 \\
u_3 + v_4 &= 0; v_4 = 0 \quad u_1 + v_3 - c_{13} = -2 \\
u_2 + v_1 - c_{21} &= -8 \\
u_2 + v_3 - c_{23} &= -9 \\
u_2 + v_4 - c_{24} &= -10 \\
u_3 + v_1 - c_{31} &= 0 \\
u_3 + v_2 - c_{32} &= -10
\end{aligned}$$

Como todos son ≤ 0 entonces es solución con la función objetivo igual a 169000, con $x_{11} = 6000$, $x_{12} = 1000$, $x_{22} = 4000$ y $x_{33} = 7000$.

6 Ejercicio 9

Enunciado 1

Una empresa de maderas dispone de tres fábricas para satisfacer la demanda de cuatro pueblos. Las fábricas A, B y C pueden satisfacer 35, 50 y 40 toneladas de madera, respectivamente. El valor máximo de consumo de madera es de 45, 20, 30 y 30 toneladas, respectivamente. El coste de transportar cada tonelada de madera desde cada fábrica a cada pueblo es el siguiente:

	Pueblo 1	Pueblo 2	Pueblo 3	Pueblo 4
	45	20	30	30
Fabrica 1 35	8	6	10	9
Fabrica 2 50	9	12	13	7
Fabrica 3 40	14	9	16	5

Encuentre la asignación que menor coste ofrece.

Enunciado 2

Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de televisores tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costes de transporte por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Fabrica 1 35	3	7	1
Fabrica 2 50	2	2	6